INGENIEUR-ARCHIV

UNTER MITWIRKUNG DER
GESELLSCHAFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
ZUSAMMEN MIT

A. BETZ · K. KLOTTER · K. MAGNUS · E. METTLER
K. v. SANDEN · E. SCHMIDT · E. SÖRENSEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL

XXIX. BAND VIERTES HEFT 1960

SPRINGER-VERLAG · BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG

Abgeschlossen am 9. August 1960

Postverlagsort Berlin *Preis DM 12,—*

Das

INGENIEUR-ARCHIV

erscheint nach Maßgabe des eingehenden Materials zwanglos in einzeln berechneten Heften, die zu Bänden vereinigt werden.

Die für das Ingenieur-Archiv bestimmten Manuskripte sind unmittelbar an den Herausgeber

Herrn Professor Dr.-Ing. Dr. R. Grammel, Stuttgart N, Robert-Bosch-Straße 101

oder an die Herren

Professor Dr.-Ing. Dr. A. Betz, Göttingen, Herzberger Landstraße 39 A
Professor Dr.-Ing. K. Klotter, Darmstadt, Technische Hochschule, Institut für angewandte Mechanik
Professor Dr. K. Magnus, Stuttgart O, Hackländerstraße 33
Professor Dr. E. Mettler, Karlsruhe-Durlach, Geigersbergstr. 12
Professor Dr.-Ing. K. v. Sanden, Karlsruhe-West, Hertzstr. 16, (T. H. West)
Professor Dr.-Ing. E. Schmidt, Technische Hochschule, München, Arcisstr. 21
Professor Dr.-Ing. E. Sörensen, Augsburg, MAN

einzusenden.

Die zum Druck angenommenen Arbeiten werden, soweit dies drucktechnisch möglich ist, nach der Reihenfolge ihres Eingangs beim Herausgeber veröffentlicht.

Die Mitarbeiter erhalten von ihrer Arbeit zusammen 75 Sonderdrucke unentgeltlich.

Für die Abfassung der Arbeiten wird auf das vom Deutschen Normenausschuß herausgegebene Heft „Gestaltung technisch-wissenschaftlicher Veröffentlichungen" hingewiesen. Die Vorlagen für Abbildungen sind auf besonderen Blättern erwünscht und können entweder in Reinzeichnungen oder in klarverständlichen Handskizzen bestehen; die Beschriftung und nötigenfalls die Reinzeichnung nimmt der Verlag vor.

Nachdruck: Mit der Annahme des Manuskripts eines Beitrages für das „Ingenieur-Archiv" erwirbt der Springer-Verlag das ausschließliche Verlagsrecht für alle Sprachen und Länder, einschließlich des Rechts der photomechanischen Wiedergabe oder einer sonstigen Vervielfältigung. — Im „Ingenieur-Archiv" erscheinende Arbeiten dürfen nicht vorher an anderer Stelle veröffentlicht worden sein und auch später nicht anderweitig, weder im Inland noch im Ausland, veröffentlicht werden. Ausnahmen von dieser Regel bedürfen einer entsprechenden Vereinbarung zwischen Autor, Herausgeber und Verlag.

Photokopien: Auf Grund des zwischen dem Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. und dem Bundesverband der Deutschen Industrie abgeschlossenen Rahmenabkommens ist jedoch die Anfertigung photomechanischer Kopien eines Beitrages gewerblichen Unternehmen für den innerbetrieblichen Gebrauch gestattet, sofern der Hersteller oder Benutzer jede Seite dieser Kopie mit einer Gebühren-Wertmarke im Betrag von DM 0,30 kenntlich macht. Diese Marken sind zu beziehen vom Börsenverein des Deutschen Buchhandels e. V. (Inkasso-Stelle) Frankfurt/M., Großer Hirschgraben 17/19. *Der Verlag läßt diese Beträge den Autorenverbänden zufließen.* Die Verpflichtung zur Verwendung von Gebühren-Wertmarken entfällt, falls der Hersteller von Kopien mit dem Springer-Verlag ein Pauschalabkommen über die Kopie-Gebühren-Entrichtung vereinbart hat.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in dieser Zeitschrift berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

SPRINGER-VERLAG

Heidelberg
Neuenheimer Landstraße 28—30 / Fernsprecher 2 79 01

Berlin-Wilmersdorf
Heidelberger Platz 3 / Fernsprecher Sammel-Nr. 83 03 01

Inhalt:

Seite

Bufler, H., Der Spannungszustand in einem aus zwei elastischen Halbscheiben bestehenden Verbundkörper. Mit 14 Abbildungen 233

Bufler, H., und *F. Kießling*, Zur homogenen Maschine mit Zusatzdrehmassen. Mit 7 Abbildungen 250

Stanišić, M. M., and *R. M. McKinley*, On the steady thermoelastic problems with elastic characteristics depending on temperature 260

Leipholz, H., Knickung verwundener Stäbe unter Druck einer konservativen, kontinuierlich und gleichmäßig verteilten Belastung. Mit 8 Abbildungen..... 262

Jäger, B., Die Eigenfrequenzen verwundener Schaufeln. Mit 11 Abbildungen ... 280

Szablewski, W. Analyse von Messungen turbulenter Grenzschichten mittels der Wandgesetze. Mit 14 Abbildungen 291

INGENIEUR-ARCHIV

XXIX. BAND VIERTES HEFT 1960

Der Spannungszustand in einem aus zwei elastischen Halbscheiben bestehenden Verbundkörper

Von H. Bufler

1. Einführung. In einer früheren Mitteilung[1] wurden aus den Grenzbedingungen des gemischten Randwertproblems die Integralgleichungen für die Druckspannung p und die Schubbelastung q im Verbundgebiet $-a \leqq x \leqq a$ zweier verschiedener elastischer Halbscheiben gleicher Dicke (Abb. 1) aufgestellt und gelöst. Die unter Voraussetzung eines ebenen Spannungszustandes * gewonnene allgemeine Lösung lautet ** danach in komplexer Schreibweise und in bezug auf Abb. 2

$$F(x) = \frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\beta}{\pi}\,\frac{\left(\dfrac{a-x}{a+x}\right)^{i\beta}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,(a\,D_1 + x\,D_2) \qquad (-a < x < a)\,. \tag{1}$$

Hierin bedeuten

$$F(x) = p(x) + i\,q(x) \qquad (i = \sqrt{-1}) \tag{2}$$

und

$$\beta = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{\pi + C_0}{\pi - C_0} \tag{3}$$

sowie

$$D_1 = \frac{P}{a} - 2\,C_2\beta + i\left(\frac{Q}{a} + 2\,C_1\beta\right), \qquad D_2 = C_1 + i\,C_2\,, \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} C_0 &= \frac{\pi}{2}\,\frac{(1-\nu_2)\,E_1 - (1-\nu_1)\,E_2}{E_1 + E_2} \qquad \left(-\frac{\pi}{2} \leqq C_0 \leqq \frac{\pi}{2}\right), \\ C_1 &= -\frac{\pi}{2}\,\frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}\,\varphi\,, \\ C_2 &= \frac{\pi}{2}\,\frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2}\left[(\alpha_2 - \alpha_1)\,t + \frac{\sigma_{02}}{E_2} - \frac{\sigma_{01}}{E_1}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Der Elastizitätsmodul, die Querdehnzahl und der Wärmeausdehnungskoeffizient der Scheibe *1* bzw. *2* sind dabei mit E_1, ν_1, α_1 bzw. E_2, ν_2, α_2 bezeichnet; t ist die Temperaturdifferenz gegenüber

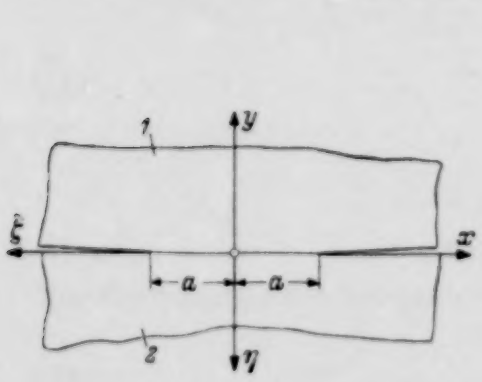


Abb. 1. Verbundkörper, bestehend aus zwei verschiedenen elastischen Halbscheiben *1* und *2*.

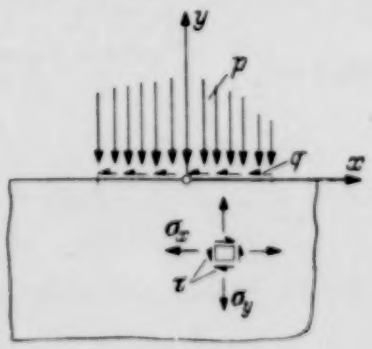


Abb. 2. Randspannungen p, q an der unteren Halbscheibe.

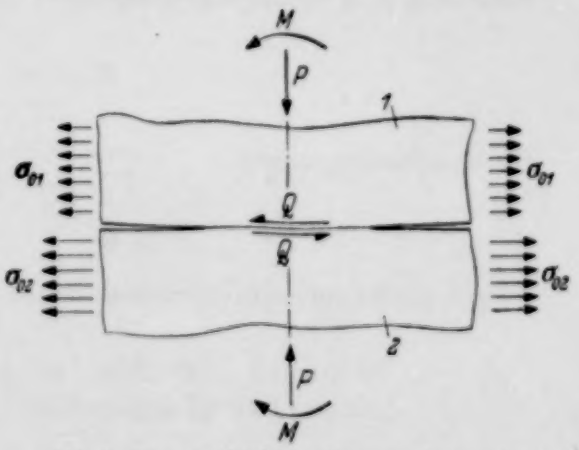


Abb. 3. Die verschiedenen Beanspruchungsarten des Verbundkörpers.

[1] *H. Bufler*, Z. angew. Math. Mech. 39 (1959) S. 218.

* Der ebene Spannungszustand erfährt in der Nähe der Berührungszone beider Scheiben wegen der hier vorhandenen Behinderung der Querdehnung (senkrecht zur Scheibenebene) eine gewisse Störung, die auf einen um so kleineren Bereich beschränkt bleibt, je geringer die Scheibendicke ist. Bei sehr dünnen Scheiben, die wir hier voraussetzen wollen, darf daher ihr Einfluß vernachlässigt werden.

** Im Gegensatz zu meiner zitierten früheren Arbeit legen wir hier das Koordinatensystem der Abb. 2 zugrunde, da dieses für das weitere zweckmäßig ist.

dem wärmespannungsfreien Zustand (wobei konstante Temperatur in beiden Scheiben vorausgesetzt wird) und zählt positiv bei Erwärmung; φ bedeutet den Verdrehungswinkel zwischen beiden Scheiben, und P bzw. Q ist die Kraft pro Scheibendicke, mit der beide Scheiben aufeinandergepreßt bzw. gegeneinander geschoben werden; σ_{01} und σ_{02} sind schließlich die konstanten Vorspannungen in x-Richtung. Das Verdrehungsmonemt (pro Scheibendicke) M, die Querkraft Q und der Winkel φ (bzw. die Konstante C_1) sind durch die Beziehung

$$C_1 = -\frac{2}{1+4\beta^2}\left(\frac{M}{a^2}+2\beta\frac{Q}{a}\right) \tag{6}$$

miteinander verknüpft.

Gleichung (1) gilt für fünf verschiedene, in meiner früheren Arbeit diskutierte Belastungsfälle (Abb. 3), nämlich reinen zentrischen Druck bzw. Zug (Fall I), Schub bei verhinderter Verdrehungsmöglichkeit (Fall II; wegen $\varphi = 0$ ist dazu das Moment $M = -2\beta Q a$ erforderlich), reiner Schub (Fall III; wegen $M = 0$ stellt sich hier der Winkel $\varphi = \frac{8}{\pi}\frac{\beta}{1+4\beta^2}\frac{E_1+E_2}{E_1 E_2}\frac{Q}{a}$ ein), reine Verdrehung (Fall IV), Wärme- und Vorspannungen (Fall V). Es wird angenommen, daß sich die beiden Halbscheiben außerhalb des Bereichs $-a \leqq x \leqq a$ nicht berühren. Die Berandung einer Scheibe muß dann etwa so verlaufen, wie sie in Abb. 1 angedeutet ist.

Trennt man Gleichung (1) in Real- und Imaginärteil, so folgt wegen (2)

$$\left.\begin{aligned} p(x) &= \frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\beta}{\pi}\,a\,\frac{A\cos\left(\beta\ln\frac{a-x}{a+x}\right)-B\sin\left(\beta\ln\frac{a-x}{a+x}\right)}{\sqrt{a^2-x^2}}\,,\\ q(x) &= \frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\beta}{\pi}\,a\,\frac{B\cos\left(\beta\ln\frac{a-x}{a+x}\right)+A\sin\left(\beta\ln\frac{a-x}{a+x}\right)}{\sqrt{a^2-x^2}}\,; \end{aligned}\right\} \tag{1'}$$

A und B sind dabei die später in (23) festgelegten Abkürzungen.

In der vorliegenden Arbeit soll der Spannungszustand im Inneren der beiden Scheiben bestimmt werden. Man hat dazu die entsprechende Randwertaufgabe (erstes Randwertproblem für die durch (1′) gegebene Randbelastung) zu lösen.

2. Bestimmung der Spannungsfunktion. Zur Ermittlung der Spannungen in beiden Halbscheiben macht man zweckmäßig von der komplexen Methode Gebrauch, die auf *G. V. Kolosov* und *N. I. Muskhelishvili*[1] zurückgeht und deren Anwendung wegen (1) und (2) naheliegt. Danach lassen sich die Spannungskomponenten in einer Halbscheibe, deren Randspannungen oder Randverschiebungen vorgegeben sind, durch eine einzige komplexe Spannungsfunktion $\Phi(z)$ der komplexen Veränderlichen $z = x + iy$ ausdrücken.

Wir betrachten zunächst die untere Halbscheibe entsprechend Abb. 2. Bei gegebener Randbelastung p, q erfüllt die Funktion*

$$\Phi_2(z) = \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{+a}\frac{p(u)-i\,q(u)}{u-z}\,du \tag{7}$$

die Randbedingungen

$$\begin{aligned} &\sigma_y = -p\,, && \tau = -q && \text{für} \quad x^2 < a^2\,,\\ &\sigma_y = 0\,, && \tau = 0 && \text{für} \quad x^2 > a^2\,. \end{aligned}$$

Wegen (2) kann man schreiben

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-a}^{+a}\frac{\bar{F}(u)}{u-z}\,du\,, \tag{7'}$$

wobei hier wie im folgenden der Querstrich den jeweils konjugiert komplexen Ausdruck bedeutet.

Unter Berücksichtigung von (1) folgt nun

$$\Phi(z) = \frac{\mathfrak{Cof}\,\pi\beta}{2\pi^2 i}\left[\left(a\,\overline{D_1}+z\,\overline{D_2}\right)J_1+\overline{D_2}\,J_2\right] \tag{7''}$$

[1] *N. I. Muskhelishvili*, Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity, Groningen 1953.

* Siehe Gl. (113.2) des oben zitierten Buches, mit unseren Bezeichnungen.

mit den Abkürzungen

$$J_1 = \int_{-a}^{+a} \frac{\left(\frac{a-u}{a+u}\right)^{-i\beta}}{\sqrt{a^2-u^2}\cdot(u-z)}\,du = \frac{1}{a}\int_{-1}^{+1} \frac{\left(\frac{1-\frac{u}{a}}{1+\frac{u}{a}}\right)^{-i\beta}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}\left(\frac{u}{a}-\frac{z}{a}\right)}\,d\frac{u}{a}$$

und

$$J_2 = \int_{-a}^{+a} \frac{\left(\frac{a-u}{a+u}\right)^{-i\beta}}{\sqrt{a^2-u^2}}\,du = \int_{-1}^{+1} \frac{\left(\frac{1-\frac{u}{a}}{1+\frac{u}{a}}\right)^{-i\beta}}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{a}\right)^2}}\,d\frac{u}{a}.$$

Wir führen folgende Substitutionen ein:

$$\frac{u}{a} = \frac{e^{u^*}-1}{e^{u^*}+1} = \mathfrak{Tg}\,\frac{u^*}{2}, \tag{8}$$

$$\frac{z}{a} = \frac{e^{z^*}-1}{e^{z^*}+1} = \mathfrak{Tg}\,\frac{z^*}{2}. \tag{9}$$

Wegen $\left(\frac{u}{a}\right)^2 \leqq 1$ ist der Hauptwert von u^* reell; z^* ist im allgemeinen komplex, sein Hauptwert wird nur reell für $z = x$ und $\left(\frac{x}{a}\right)^2 \leqq 1$, also längs der Berührungslinie. Aus dem Ausdruck

$$e^{z^*} = \frac{a^2-(x^2+y^2)}{(a-x)^2+y^2} + i\,\frac{2\,a\,y}{(a-x)^2+y^2},$$

der unmittelbar aus (9) mit $z = x + i\,y$ folgt, ersieht man, daß für Punkte innerhalb der betrachteten (unteren) Halbscheibe wegen $y < 0$ die Beziehung $\mathrm{Im}\,(e^{z^*}) < 0$ gilt und infolgedessen für den Hauptwert von z^* auch die Beziehung

$$\pi < \mathrm{Im}\,z^* < 2\,\pi.$$

Mit (8) und (9) erhält man

$$J_1 = \frac{1+e^{z^*}}{2\,a}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\left(\frac{1}{2}+i\,\beta\right)u^*}}{e^{u^*}-e^{z^*}}\,du^* \qquad (\pi < \mathrm{Im}\,z^* < 2\,\pi) \tag{10}$$

und

$$J_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{\left(\frac{1}{2}+i\,\beta\right)u^*}}{e^{u^*}+1}\,du^*. \tag{11}$$

Zur Bestimmung des Integrales J_2 dient die von *H. G. Söhngen*[1] [dort Gl. (19)] abgeleitete Formel

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{s\,u^*}}{(e^{u^*}+1)^n}\,du^* = (-1)^{n-1}\binom{s-1}{n-1}\frac{1}{\sin\pi\,s} \qquad \begin{array}{l}(u^* \text{ reell};\ 0 < \mathrm{Re}\,s < n;\\ n \text{ ganzzahlig und positiv}).\end{array} \tag{12}$$

Sie liefert das Ergebnis

$$J_2 = \frac{\pi}{\mathfrak{Cof}\,\pi\beta}. \tag{11'}$$

Das Integral J_1 kann nach der Residuenmethode ausgewertet werden.

[1] *H. G. Söhngen*, Math. Z. 60 (1954) S. 31.

Wir berechnen zunächst das etwas allgemeinere Integral

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{(1-s)u^*}}{e^{u^*}-e^{z^*}}\,du^*$$

unter der Voraussetzung, daß $0<\operatorname{Im} z^*<2\pi$ und $0<\operatorname{Re} s<1$. Betrachtet man hierin vorübergehend u^* als komplexe Veränderliche, so besitzt der Integrand $f(u^*)=g(u^*)/h(u^*)$ im Gebiet $\operatorname{Im} u^*>0$ Pole erster Ordnung bei

$$u_n^*=z^*+2i\pi n \qquad (n=0,1,2,\ldots).$$

Nach dem Residuensatz gilt dann für das sich über die gesamte Halbebene $\operatorname{Im} u^*\geqq 0$ erstreckende Umlaufintegral

$$\oint f(u^*)\,du^*=2\pi i\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{g(u^*)}{h'(u^*)}\right]_{u^*=u_n^*}=2\pi i\,e^{-sz^*}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2i\pi sn}=\frac{\pi}{\sin\pi s}\,e^{-s(z^*-i\pi)}.$$

Man kann den Integrationsweg folgendermaßen aufteilen:

$$\oint f(u^*)\,du^*=\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty}f(u^*)\,du^*}_{\text{reelle Achse}}+\underbrace{\int_{0}^{\pi}f(Re^{i\varphi})\,Rie^{i\varphi}\,d\varphi}_{\substack{R\to\infty\\ \text{Halbkreisbogen}}}.$$

Da der Halbkreisbogenanteil für $R\to\infty$ und $0<\operatorname{Re} s<1$ verschwindet, folgt sofort

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{(1-s)u^*}}{e^{u^*}-e^{z^*}}\,du^*=\frac{e^{-s(z^*-i\pi)}}{\sin\pi s}\qquad(0<\operatorname{Im} z^*<2\pi;\quad 0<\operatorname{Re} s<1). \tag{13}$$

Aus (10) mit (13) bekommt man nun

$$J_1=i\,\frac{\pi}{a}\,\frac{1}{\mathfrak{Cof}\,\pi\beta}\,\mathfrak{Cof}\,\frac{z^*}{2}\,e^{i\beta(z^*-i\pi)}. \tag{10'}$$

Wir setzen jetzt (10') und (11') in (7'') ein. Die für die untere Halbscheibe gültige Spannungsfunktion lautet dann bei Beachtung von (9) mit $\Phi(z)=\Phi^*(z^*)$

$$\Phi^*(z^*)=\frac{1}{2\pi i}\left[i\,e^{i\beta(z^*-i\pi)}\cdot\left(\overline{D}_1\,\mathfrak{Cof}\,\frac{z^*}{2}+\overline{D}_2\,\mathfrak{Sin}\,\frac{z^*}{2}\right)+\overline{D}_2\right] \tag{14}$$

oder, in z ausgedrückt,

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\left[-(a\,\overline{D}_1+z\,\overline{D}_2)\,\frac{\left(\frac{z-a}{z+a}\right)^{-i\beta}}{\sqrt{z^2-a^2}}+\overline{D}_2\right]. \tag{14'}$$

Im weiteren wird der Differentialquotient $\Phi'(z)=\frac{d}{dz}\,\Phi(z)$ benötigt. Zweckmäßig geht man dazu von (14) aus und bildet zunächst

$$\frac{d\Phi^*(z^*)}{dz^*}=\frac{e^{i\beta(z^*-i\pi)}}{2\pi}\left[\left(\frac{\overline{D}_1}{2}+i\beta\,\overline{D}_2\right)\mathfrak{Sin}\,\frac{z^*}{2}+\left(\frac{\overline{D}_2}{2}+i\beta\,\overline{D}_1\right)\mathfrak{Cof}\,\frac{z^*}{2}\right] \tag{15}$$

sowie

$$\frac{d}{dz}\,\Phi(z)=\frac{d}{dz^*}\,\Phi^*(z^*)\,\frac{dz^*}{dz}=\frac{e^{i\beta(z^*-i\pi)}}{a\pi}\,\mathfrak{Cof}^2\,\frac{z^*}{2}\left[\left(\frac{\overline{D}_1}{2}+i\beta\,\overline{D}_2\right)\mathfrak{Sin}\,\frac{z^*}{2}+\left(\frac{\overline{D}_2}{2}+i\beta\,\overline{D}_1\right)\mathfrak{Cof}\,\frac{z^*}{2}\right]. \tag{16}$$

Bei Berücksichtigung von (9) geht (16) über in

$$\Phi'(z)=-\frac{ia}{\pi}\,\frac{\left(\frac{z-a}{z+a}\right)^{-i\beta}}{(z^2-a^2)^{3/2}}\left[\left(\frac{\overline{D}_1}{2}+i\beta\,\overline{D}_2\right)z+\left(\frac{\overline{D}_2}{2}+i\beta\,\overline{D}_1\right)a\right]. \tag{16'}$$

3. Ermittlung der Spannungskomponenten in der unteren Halbscheibe. Die von der Randbelastung p, q herrührenden Normalspannungen $(\sigma_x)_2$, $(\sigma_y)_2$, und die Schubspannung τ_2 in der unteren Halbscheibe sind mit der Spannungsfunktion $\Phi_2=\Phi$ verknüpft durch die Gleichungen*

$$(\sigma_y)_2+(\sigma_x)_2=2\,[\Phi(z)+\overline{\Phi}(\overline{z})]+\sigma_{02}, \tag{17}$$

$$(\sigma_y)_2-(\sigma_x)_2+2i\,\tau_2=2\,[(\overline{z}-z)\,\Phi'(z)-\Phi(z)-\overline{\Phi}(z)]-\sigma_{02} \tag{18}$$

* Siehe Seite 454 des in Fußnote 1 von Seite 234 zitierten Buches.

(in vorstehenden Formeln ist die zum Rand parallele konstante Vorspannung σ_{02} bereits berücksichtigt). Dabei ist entsprechend der Definition folgender Zusammenhang zwischen $\Phi(z)$, $\bar{\Phi}(z)$ und $\bar{\Phi}(\bar{z})$ zu beachten: Falls

$$\Phi(z) = \Phi_I(x, y) + i\,\Phi_{II}(x, y)\,,$$

ist, dann bedeutet

$$\bar{\Phi}(\bar{z}) = \Phi_I(x, y) - i\,\Phi_{II}(x, y)$$

und

$$\bar{\Phi}(z) = \Phi_I(x, -y) - i\,\Phi_{II}(x, -y)\,.$$

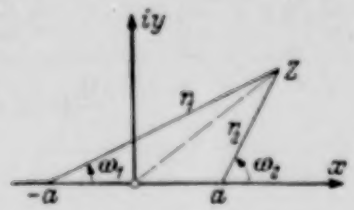


Abb. 4. Bipolarkoordinatensystem.

Für das weitere ist es günstig, das in Abb. 4 skizzierte Bipolarkoordinatensystem einzuführen. Hierfür gilt

$$z + a = r_1\, e^{i\,\omega_1}\,, \qquad z - a = r_2\, e^{i\,\omega_2}\,. \tag{19}$$

Damit erhält man nach geeigneter Zusammenfassung aus (14′) und (16′)

$$\Phi(z) + \bar{\Phi}(\bar{z}) = \frac{1}{\pi}\,\frac{e^{\beta(\omega_2-\omega_1)}}{\sqrt{r_1 r_2}}\left[(a\,A + y\,C_2)\sin\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\right.$$
$$\left. + (a\,B - y\,C_1)\cos\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\right] - \frac{C_2}{\pi}\,. \tag{20}$$

$$\Phi(z) + \bar{\Phi}(z) = \frac{1}{\pi}\,\frac{e^{-i\left(\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)}}{\sqrt{r_1 r_2}}\left\{(a\,A + i\,y\,C_1)\sin\left[\beta\ln\frac{r_2}{r_1} + i\,\beta\,(\omega_2-\omega_1)\right]\right.$$
$$\left. + (a\,B + i\,y\,C_2)\cos\left[\beta\ln\frac{r_2}{r_1} + i\,\beta\,(\omega_2-\omega_1)\right]\right\} - \frac{C_2}{\pi}\,, \tag{21}$$

$$(\bar{z} - z)\,\Phi'(z) = -\frac{a^2}{\pi}\,\frac{y}{(r_1 r_2)^{3/2}}\,e^{\beta(\omega_2-\omega_1)}\,e^{-i\left[\beta\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{3}{2}(\omega_1+\omega_2)\right]}\,(C - i\,D)\,. \tag{22}$$

In vorstehenden Formeln wurden als Abkürzungen folgende reelle Größen verwendet:

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{P}{a} - 2\,C_2\,\beta + \frac{x}{a}\,C_1\,,\\ B &= \frac{Q}{a} + 2\,C_1\,\beta + \frac{x}{a}\,C_2\,,\\ C &= (1 + 4\,\beta^2)\,C_1 + \frac{x}{a}\,\frac{P}{a} + \left(\frac{y}{a} + 2\,\beta\right)\frac{Q}{a}\,,\\ D &= (1 + 4\,\beta^2)\,C_2 + \frac{x}{a}\,\frac{Q}{a} - \left(\frac{y}{a} + 2\,\beta\right)\frac{P}{a}\,. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Setzt man nun die Ausdrücke (20), (21) und (22) in (17) und (18) ein und trennt in Real- und Imaginärteil, so erhält man für die Spannungen $(\sigma_x)_2$, $(\sigma_y)_2$ und τ_2 in der unteren Halbscheibe die drei Gleichungen

$$\tau_2 = \frac{a^2}{\pi}\,y\,\frac{e^{\beta(\omega_2-\omega_1)}}{(r_1 r_2)^{3/2}}\left\{C\sin\left[\beta\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{3}{2}(\omega_1+\omega_2)\right] + D\cos\left[\beta\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{3}{2}(\omega_1+\omega_2)\right]\right\}$$
$$+ \frac{a}{\pi\sqrt{r_1 r_2}}\left(E\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2} - F\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right), \tag{24}$$

$$(\sigma_y)_2 + (\sigma_x)_2 = \frac{2}{\pi}\,\frac{e^{\beta(\omega_2-\omega_1)}}{\sqrt{r_1 r_2}}\left[(a\,A + y\,C_2)\sin\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\right.$$
$$\left. + (a\,B - y\,C_1)\cos\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\right] - \frac{2}{\pi}\,C_2 + \sigma_{02}\,, \tag{25}$$

$$(\sigma_y)_2 - (\sigma_x)_2 = \frac{2}{\pi}\,a^2\,y\,\frac{e^{\beta(\omega_2-\omega_1)}}{(r_1 r_2)^{3/2}}\left\{D\sin\left[\beta\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{3}{2}(\omega_1+\omega_2)\right] - C\cos\left[\beta\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{3}{2}(\omega_1+\omega_2)\right]\right\}$$
$$- \frac{2}{\pi}\,\frac{a}{\sqrt{r_1 r_2}}\left(F\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2} + E\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right) + \frac{2}{\pi}\,C_2 - \sigma_{02}\,. \tag{26}$$

Hierin bedeuten

$$\left.\begin{aligned} E &= \frac{y}{a}\,\mathfrak{Sin}\,\beta\,(\omega_2-\omega_1)\left[C_2\sin\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)-C_1\cos\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)\right] \\ &\quad+\mathfrak{Cof}\,\beta\,(\omega_2-\omega_1)\left[A\sin\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)+B\cos\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)\right], \\ F &= \frac{y}{a}\,\mathfrak{Cof}\,\beta\,(\omega_2-\omega_1)\left[C_1\sin\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)+C_2\cos\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)\right] \\ &\quad+\mathfrak{Sin}\,\beta\,(\omega_2-\omega_1)\left[-B\sin\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)+A\cos\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

4. Die Spannungskomponenten in der oberen Halbscheibe. Aus der Lösung für den Spannungszustand in der unteren Halbscheibe läßt sich leicht diejenige für die obere Halbscheibe herleiten. In bezug auf das (ξ,η)-Koordinatensystem (Abb. 1) geben nämlich die Formeln (24), (25) und (26) die Spannungen für die obere Halbscheibe, wobei jetzt $z=\xi+i\,\eta$ bedeutet. Allerdings ist, da beide Ebenen ihre Rollen vertauschen, wegen (5) zu ersetzen

$$C_0 \text{ durch } -C_0 \qquad (\text{daher } -\beta \text{ statt } +\beta),$$
$$C_1 \text{ durch } -C_1, \qquad C_2 \text{ durch } -C_2, \qquad \sigma_{02} \text{ durch } \sigma_{01}.$$

Will man die Spannungen wieder auf das x-y-Koordinatensystem beziehen, so hat man weiterhin zu ersetzen:

z durch $-z$ (d. h. x durch $-x$, y durch $-y$, r_1 durch r_2, r_2 durch r_1, ω_1 durch $\omega_2-\pi$, ω_2 durch $\omega_1-\pi$).

Damit erhält man die endgültigen Formeln

$$\tau_1 = -\frac{a^2}{\pi}\,y\,\frac{e^{\beta(\omega_2-\omega_1)}}{(r_1\,r_2)^{3/2}}\left\{C\sin\left[\beta\ln\frac{r_2}{r_1}+\frac{3}{2}(\omega_1+\omega_2)\right]+D\cos\left[\beta\ln\frac{r_2}{r_1}+\frac{3}{2}(\omega_1+\omega_2)\right]\right\}$$
$$-\frac{a}{\pi\sqrt{r_1\,r_2}}\left(E\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}-F\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right), \tag{28}$$

$$(\sigma_y)_1+(\sigma_x)_1 = -\frac{2}{\pi}\,\frac{e^{\beta(\omega_2-\omega_1)}}{\sqrt{r_1\,r_2}}\left[(a\,A+y\,C_2)\sin\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}+\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\right.$$
$$\left.+(a\,B-y\,C_1)\cos\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}+\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)\right]+\frac{2}{\pi}\,C_2+\sigma_{01}, \tag{29}$$

$$(\sigma_y)_1-(\sigma_x)_1 = -\frac{2}{\pi}\,a^2\,y\,\frac{e^{\beta(\omega_2-\omega_1)}}{(r_1\,r_2)^{3/2}}\left\{D\sin\left[\beta\ln\frac{r_2}{r_1}+\frac{3}{2}(\omega_1+\omega_2)\right]-C\cos\left[\beta\ln\frac{r_2}{r_1}+\frac{3}{2}(\omega_1+\omega_2)\right]\right\}$$
$$+\frac{2}{\pi}\,\frac{a}{\sqrt{r_1\,r_2}}\left(F\sin\frac{\omega_1+\omega_2}{2}+E\cos\frac{\omega_1+\omega_2}{2}\right)-\frac{2}{\pi}\,C_2-\sigma_{01}. \tag{30}$$

A, B, C, D, E, F sind dabei identisch mit den früher schon verwendeten Abkürzungen.

Die Formeln (28), (29), (30) unterscheiden sich von den Formeln (25), (26), (27) lediglich durch das umgekehrte Vorzeichen (wenn man von den konstanten Vorspannungen σ_{01} und σ_{02} absieht). Dieser Sachverhalt ist in der Tatsache begründet, daß zwischen der Spannungsfunktion der oberen $[\Phi_1(z)]$ und der unteren Halbscheibe $[\Phi_2(z)]$ die Beziehung

$$\Phi_1(z)+\Phi_2(z)=0$$

gilt, welche sich aus den Randbedingungen herleiten läßt*.

5. Diskussion des Spannungszustandes. Wir wenden uns nun den in Ziff. 1 besprochenen Belastungsarten I bis V zu. Die in den einzelnen Fällen maßgebenden Größen C_1, C_2 [nach (5)], A, B, C, D [nach (23)] sowie E, F [nach (27)] sind in Tabelle 1 zusammengestellt. Sie vereinfachen sich wesentlich für $\beta=0$ (Tabelle 2).

* Vgl. hierzu Seite 491 des Buches von Fußnote 1 von Seite 234.

Tabelle 1. *Die für die Beanspruchungsarten I bis V maßgebenden Größen C_1, C_2, A, B, C, D, E, F*

	C_1	C_2	A	B	C	D
I	0	0	$\frac{P}{a}$	0	$\frac{x}{a}\frac{P}{a}$	$-\left(\frac{y}{a}+2\beta\right)\frac{P}{a}$
II	0	0	0	$\frac{Q}{a}$	$\left(\frac{y}{a}+2\beta\right)\frac{Q}{a}$	$\frac{x}{a}\frac{Q}{a}$
III	$-\frac{4\beta}{1+4\beta^2}\frac{Q}{a}$	0	$-\frac{x}{a}\frac{4\beta}{1+4\beta^2}\frac{Q}{a}$	$\frac{1-4\beta^2}{1+4\beta^2}\frac{Q}{a}$	$\left(\frac{y}{a}-2\beta\right)\frac{Q}{a}$	$\frac{x}{a}\frac{Q}{a}$
IV	$-\frac{2}{1+4\beta^2}\frac{M}{a^2}$	0	$-\frac{x}{a}\frac{2}{1+4\beta^2}\frac{M}{a^2}$	$-\frac{4\beta}{1+4\beta^2}\frac{M}{a^2}$	$-2\frac{M}{a^2}$	0
V	0	C_2 nach (5)	$-2\beta C_2$	$\frac{x}{a}C_2$	0	$(1+4\beta^2)C_2$

	E
I	$\mathfrak{Cof}\beta\,(\omega_2-\omega_1)\sin\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)\frac{P}{a}$
II	$\mathfrak{Cof}\beta\,(\omega_2-\omega_1)\cos\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)\frac{Q}{a}$
III	$\left\{\frac{y}{a}4\beta\,\mathfrak{Sin}\beta\,(\omega_2-\omega_1)\cos\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)-\mathfrak{Cof}\beta\,(\omega_2-\omega_1)\left[\frac{x}{a}4\beta\sin\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)-(1-4\beta^2)\cos\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)\right]\right\}\frac{Q/a}{1+4\beta^2}$
IV	$\left\{\frac{y}{a}\,\mathfrak{Sin}\beta\,(\omega_2-\omega_1)\cos\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)-\mathfrak{Cof}\beta\,(\omega_2-\omega_1)\left[\frac{x}{a}\sin\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)+2\beta\cos\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)\right]\right\}\frac{2\,M/a^2}{1+4\beta^2}$
V	$\left\{\frac{y}{a}\,\mathfrak{Sin}\beta\,(\omega_2-\omega_1)\sin\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)+\mathfrak{Cof}\beta\,(\omega_2-\omega_1)\left[\frac{x}{a}\cos\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)-2\beta\sin\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)\right]\right\}C_2$

	F
I	$\mathfrak{Sin}\beta\,(\omega_2-\omega_1)\cos\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)\frac{P}{a}$
II	$-\mathfrak{Sin}\beta\,(\omega_2-\omega_1)\sin\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)\frac{Q}{a}$
III	$-\left\{\frac{y}{a}4\beta\,\mathfrak{Cof}\beta\,(\omega_2-\omega_1)\sin\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)+\mathfrak{Sin}\beta\,(\omega_2-\omega_1)\left[\frac{x}{a}4\beta\cos\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)+(1-4\beta^2)\sin\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)\right]\right\}\frac{Q/a}{1+4\beta^2}$
IV	$-\left\{\frac{y}{a}\,\mathfrak{Cof}\beta\,(\omega_2-\omega_1)\sin\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)+\mathfrak{Sin}\beta\,(\omega_2-\omega_1)\left[\frac{x}{a}\cos\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)-2\beta\sin\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)\right]\right\}\frac{2\,M/a^2}{1+4\beta^2}$
V	$\left\{\frac{y}{a}\,\mathfrak{Cof}\beta\,(\omega_2-\omega_1)\cos\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)-\mathfrak{Sin}\beta\,(\omega_2-\omega_1)\left[2\beta\cos\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)+\frac{x}{a}\sin\left(\beta\ln\frac{r_2}{r_1}\right)\right]\right\}C_2$

Tabelle 2. *Die für die Beanspruchungsarten I bis V maßgebenden Größen C_1, C_2, A, B, C, D, E, F, speziell für $\beta = 0$*

	C_1	C_2	A	B	C	D	E	F
I	0	0	$\frac{P}{a}$	0	$\frac{x}{a}\frac{P}{a}$	$-\frac{y}{a}\frac{P}{a}$	0	0
II, III	0	0	0	$\frac{Q}{a}$	$\frac{y}{a}\frac{Q}{a}$	$\frac{x}{a}\frac{Q}{a}$	Q	0
IV	$-2\frac{M}{a^2}$	0	$-\frac{x}{a}2\frac{M}{a^2}$	0	$-2\frac{M}{a^2}$	0	0	0
V	0	C_2 nach (5)	0	$\frac{x}{a}C_2$	0	C_2	$\frac{x}{a}C_2$	$\frac{y}{a}C_2$

Wie in Ziff. 4 gezeigt wurde, sind die Formeln für die entsprechenden Spannungen in beiden Halbscheiben in bezug auf das Koordinatensystem der Abb. 4 identisch bis auf das Vorzeichen, also

$$\left.\begin{aligned} \tau_2(r_1, r_2, x, y, \omega_1, \omega_2, \beta) &= -\tau_1(r_1, r_2, x, y, \omega_1, \omega_2, \beta)\,, \\ (\sigma_y)_2\,(r_1, r_2, x, y, \omega_1, \omega_2, \beta) &= -(\sigma_y)_1\,(r_1, r_2, x, y, \omega_1, \omega_2, \beta)\,, \\ [(\sigma_x)_2 - \sigma_{02}]\,(r_1, r_2, x, y, \omega_1, \omega_2, \beta) &= -[(\sigma_x)_1 - \sigma_{01}]\,(r_1, r_2, x, y, \omega_1, \omega_2, \beta)\,. \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Die Veränderlichen r_1, r_2, ω_1, ω_2, x, y sind entsprechend Abb. 4 miteinander verknüpft (wobei für $\tau_1, (\sigma_x)_1, (\sigma_y)_1$ (obere Halbscheibe) stets $\left.\begin{matrix}\omega_1\\ \omega_2\\ y\end{matrix}\right\} \geqq 0$ und für $\tau_2, (\sigma_x)_2, (\sigma_y)_2$ (untere Halbscheibe) stets $\left.\begin{matrix}\omega_1\\ \omega_2\\ y\end{matrix}\right\} \leqq 0$ gilt). Der Parameter β [nach (3)] beinhaltet die elastischen Konstanten der beiden Scheiben und liegt im Intervall

$$-\frac{\ln 3}{2\pi} \leqq \beta \leqq \frac{\ln 3}{2\pi}\,;$$

denn wegen (5) ist

$$-\frac{\pi}{2} \leqq C_0 \leqq \frac{\pi}{2}\,.$$

Falls Scheibe *1* (bzw. *2*) starr ist im Vergleich zu Scheibe *2* (bzw. *1*) und Scheibe *2* (bzw. *1*) die Querdehnzahl Null besitzt, gilt $C_0 = +$ (bzw. $-$) $\frac{\pi}{2}$ und daher $\beta = +$ (bzw. $-$) $\frac{\ln 3}{2\pi}$; besitzen dagegen beide Scheiben dieselben elastischen Konstanten, so gilt $C_0 = 0$ und infolgedessen $\beta = 0$.

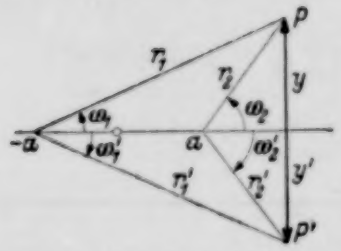


Abb. 5. Symmetrisch zur x-Achse gelegene Punkte P und P'.

Die übrigen in den Formeln für die Spannungen auftretenden Größen sind die resultierenden Kräfte P, Q und das resultierende Moment M sowie der im Fall V (Wärme- und Vorspannnngen) benötigte Ausdruck C_2.

Es soll jetzt der Zusammenhang zwischen symmetrisch zur x-Achse gelegenen Punkten P und P' untersucht werden (Abb. 5). Bedeuten

$$\omega_1' = -\omega_1\,, \qquad \omega_2' = -\omega_2\,, \qquad y' = -y\,, \qquad \beta' = -\beta\,, \tag{32}$$

so erhält man aus (24) bis (30) und mit Hilfe der Tabelle 1

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \tau_1(r_1, r_2, x, y, \omega_1, \omega_2, \beta)\,, \\ \tau_2 &= -f\,\tau_1(r_1, r_2, x, y', \omega_1', \omega_2', \beta')\,, \\ (\sigma_y)_1 &= (\sigma_y)_1\,(r_1, r_2, x, y, \omega_1, \omega_2, \beta)\,, \\ (\sigma_y)_2 &= f\,(\sigma_y)_1\,(r_1, r_2, x, y', \omega_1', \omega_2', \beta')\,, \\ (\sigma_x)_1 - \sigma_{01} - \frac{2}{\pi}C_2 &= \left[(\sigma_x)_1 - \sigma_{01} - \frac{2}{\pi}C_2\right](r_1, r_2, x, y, \omega_1, \omega_2, \beta) \\ (\sigma_x)_2 - \sigma_{02} + \frac{2}{\pi}C_2 &= f\left[(\sigma_x)_1 - \sigma_{01} - \frac{2}{\pi}C_2\right](r_1, r_2, x, y', \omega_1', \omega_2', \beta')\,. \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

Der Faktor f regelt hierbei das Vorzeichen und bedeutet

$$f = \begin{cases} +1 \\ -1 \end{cases} \qquad \text{bei den Fällen} \quad \begin{cases} I,\ IV, \\ II,\ III,\ V. \end{cases} \tag{34}$$

Wir haben somit folgendes Ergebnis, das auch für die numerische Auswertung nützlich ist: Aus den Formeln für die Spannungen an einem beliebigen Punkt P der oberen Halbscheibe erhält man diejenigen für die Spannungen an dem zu P bezüglich der x-Achse gespiegelten Punkt P', indem man lediglich β durch $\beta' = -\beta$ sowie $\left.\begin{matrix}\omega_1\\ \omega_2\\ y\end{matrix}\right\}$ durch $\left\{\begin{matrix}\omega_1'\\ \omega_2'\\ y'\end{matrix}\right.$ ersetzt; das Vorzeichen der Spannungen wird dabei durch (33) und (34) festgelegt. Im Fall $\beta = 0$ ist daher dem Betrage nach kein Unterschied zwischen den entsprechenden Spannungen in P und P' mehr vorhanden.

Für $\beta = 0$ werden die Formeln besonders einfach. Sie lauten im Fall *I*

$$\left.\begin{aligned}
\tau_1 &= -\frac{P}{\pi}\frac{y}{(r_1 r_2)^{3/2}}\left[x \sin\frac{3}{2}(\omega_1+\omega_2) - y\cos\frac{3}{2}(\omega_1+\omega_2)\right],\\
(\sigma_y)_1 &= -\frac{P}{\pi}\frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}\left\{\sin\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) - \frac{y}{r_1 r_2}\left[y\sin\frac{3}{2}(\omega_1+\omega_2) + x\cos\frac{3}{2}(\omega_1+\omega_2)\right]\right\},\\
(\sigma_x)_1 &= -\frac{P}{\pi}\frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}\left\{\sin\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) + \frac{y}{r_1 r_2}\left[y\sin\frac{3}{2}(\omega_1+\omega_2) + x\cos\frac{3}{2}(\omega_1+\omega_2)\right]\right\},
\end{aligned}\right\} \quad (35a)$$

im Fall *II* und *III*

$$\left.\begin{aligned}
\tau_1 &= -\frac{Q}{\pi}\frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}\left\{\sin\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) + \frac{y}{r_1 r_2}\left[y\sin\frac{3}{2}(\omega_1+\omega_2) + x\cos\frac{3}{2}(\omega_1+\omega_2)\right]\right\},\\
(\sigma_y)_1 &= -\frac{Q}{\pi}\frac{y}{(r_1 r_2)^{3/2}}\left[x\sin\frac{3}{2}(\omega_1+\omega_2) - y\cos\frac{3}{2}(\omega_1+\omega_2)\right],\\
(\sigma_x)_1 &= -\frac{Q}{\pi}\frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}\left\{2\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) - \frac{y}{r_1 r_2}\left[x\sin\frac{3}{2}(\omega_1+\omega_2) - y\cos\frac{3}{2}(\omega_1+\omega_2)\right]\right\},
\end{aligned}\right\} \quad (35b)$$

im Fall *IV*

$$\left.\begin{aligned}
\tau_1 &= \frac{2}{\pi}M\frac{y}{(r_1 r_2)^{3/2}}\sin\frac{3}{2}(\omega_1+\omega_2),\\
(\sigma_y)_1 &= \frac{2}{\pi}M\frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}\left\{\frac{1}{a^2}\left[x\sin\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) - y\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\right] - \frac{y}{r_1 r_2}\cos\frac{3}{2}(\omega_1+\omega_2)\right\},\\
(\sigma_x)_1 &= \frac{2}{\pi}M\frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}}\left\{\frac{1}{a^2}\left[x\sin\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) - y\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\right] + \frac{y}{r_1 r_2}\cos\frac{3}{2}(\omega_1+\omega_2)\right\},
\end{aligned}\right\} \quad (35c)$$

im Fall *V*

$$\left.\begin{aligned}
\tau_1 &= -\frac{C_2}{\pi}\frac{a^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\left\{\frac{1}{a^2}\left[x\sin\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) - y\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\right] + \frac{y}{r_1 r_2}\cos\frac{3}{2}(\omega_1+\omega_2)\right\},\\
(\sigma_y)_1 &= -\frac{C_2}{\pi}\frac{a^2}{(r_1 r_2)^{3/2}}y\sin\frac{3}{2}(\omega_1+\omega_2),\\
(\sigma_x)_1 &= -\frac{C_2}{\pi}\frac{a^2}{\sqrt{r_1 r_2}}\left\{\frac{2}{a^2}\left[y\sin\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2) + x\cos\frac{1}{2}(\omega_1+\omega_2)\right] - \frac{y}{r_1 r_2}\sin\frac{3}{2}(\omega_1+\omega_2)\right\}\\
&\quad + \frac{2}{\pi}C_2 + \sigma_{01}.
\end{aligned}\right\} \quad (35d)$$

Die Gleichungen (35a), (35b) und (35c) sind auch als Spezialfall in den Formeln für den Spannungszustand in einer unendlichen Scheibe mit beiderseitiger hyperbolischer Außenkerbe (nämlich bei verschwindendem Kerbradius) enthalten[1].

Wie aus den in Ziff. 3 und 4 abgeleiteten Formeln hervorgeht, wachsen die Spannungen bei Annäherung an die Eckpunkte $(a, 0)$ und $(-a, 0)$ wegen $r_2 \to 0$ bzw. $r_1 \to 0$ über alle Grenzen. Dieser Effekt ist bereits von den Spitzkerben her bekannt[1]. Auf eine genauere Untersuchung der Besonderheiten des Spannungszustandes in unmittelbarer Umgebung der Eckpunkte wird im nächsten Abschnitt eingegangen.

6. Auswertung an speziellen Stellen. In Tabelle 3 sind die für die Koordinaten maßgebenden Relationen zusammengestellt, und zwar unter der Spalte

a) diejenigen, welche sich auf die x-Achse beziehen,

b) diejenigen, welche sich auf die y-Achse beziehen,

c) diejenigen, welche sich auf die Gerade $x = a$ beziehen,

d) diejenigen, welche sich auf den kleinen, um den Eckpunkt $x = a$ gelegten Kreis vom Halbmesser ϱ beziehen ($\varrho/a \ll 1$). Die Zeichen ① und ② sollen hierbei andeuten, ob die obere oder untere Halbscheibe gemeint ist.

[1] *H. Neuber*, Kerbspannungslehre, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958.

Tabelle 3. *Beziehungen für die Koordinaten. — a) längs der x-Achse; b) längs der y-Achse; c) längs der Geraden $x = a$; d) entlang des um den Punkt $x = a$ gelegten Kreises vom Radius $\varrho\left(\frac{\varrho}{a} \ll 1\right)$*

	a)				b)		c)		d)
	$x^2 < a^2$		$x^2 > a^2$						
	①	②	①	②	①	②	①	②	①; ②
x	x				0		a		a
y	0				$a \operatorname{tg} \omega_1$		$2a \operatorname{tg} \omega_1$		$\varrho \sin \omega_2$
ω_1	0		0 für $x \gtrless 0$		ω_1		ω_1		0
ω_2	π	$-\pi$	π	$-\pi$	$\pi - \omega_1$	$-\pi - \omega_1$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	ω_2
$\frac{r_2}{r_1}$	$\frac{a-x}{a+x}$		$\frac{x-a}{x+a}$		1		$\lvert\sin \omega_1\rvert$		$\frac{\varrho}{2a}$
$r_1 r_2$	$a^2 - x^2$		$x^2 - a^2$		$\frac{a^2}{\cos^2 \omega_1}$		$4a^2 \frac{\lvert\sin \omega_1\rvert}{\cos^2 \omega_1}$		$2a\varrho$

Im Fall a) liefern die in Ziff. 3 und 4 angegebenen Formeln folgende Spannungen:
Für $x^2 < a^2$:

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \tau_2 = -q\,, \\ (\sigma_y)_1 &= (\sigma_y)_2 = -p\,, \\ (\sigma_x)_1 &= -\left(1 + \frac{2}{\pi} C_0\right) p + \frac{2}{\pi} C_2 + \sigma_{01}\,, \\ (\sigma_x)_2 &= -\left(1 - \frac{2}{\pi} C_0\right) p - \frac{2}{\pi} C_2 + \sigma_{02}\,, \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

wobei p und q nach (1′) einzusetzen sind.

Für $x^2 > a^2$:

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \tau_2 = 0\,, \\ (\sigma_y)_1 &= (\sigma_y)_2 = 0\,, \\ (\sigma_x)_1 &= -\frac{2a}{\pi \sqrt{x^2 - a^2}} \frac{x}{|x|} \left[A \sin\left(\beta \ln \frac{x-a}{x+a}\right) + B \cos\left(\beta \ln \frac{x-a}{x+a}\right)\right] + \frac{2}{\pi} C_2 + \sigma_{01}\,, \\ (\sigma_x)_2 &= \frac{2a}{\pi \sqrt{x^2 - a^2}} \frac{x}{|x|} \left[A \sin\left(\beta \ln \frac{x-a}{x+a}\right) + B \cos\left(\beta \ln \frac{x-a}{x+a}\right)\right] - \frac{2}{\pi} C_2 + \sigma_{02}\,. \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Die Formeln (36) und (37) wurden in meiner früheren Arbeit direkt aus den Randspannungen p, q berechnet.

Im Fall b) erhält man

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{\cos \omega_1}{\pi} \left(\frac{C}{2} e^{\beta(\pi - 2\omega_1)} \sin 2\omega_1 - E\right), \\ (\sigma_y)_1 + (\sigma_x)_1 &= -\frac{2}{\pi} e^{\beta(\pi - 2\omega_1)} (A + C_2 \operatorname{tg} \omega_1) \cos \omega_1 + \frac{2}{\pi} C_2 + \sigma_{01}\,, \\ (\sigma_y)_1 - (\sigma_x)_1 &= \frac{\cos \omega_1}{\pi} (D e^{\beta(\pi - 2\omega_1)} \sin 2\omega_1 + 2F) - \frac{2}{\pi} C_2 - \sigma_{01}\,, \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

wobei A, B, C, D, E, F aus Tabelle 4 zu entnehmen sind. Die für die untere Halbscheibe geltenden Formeln folgen wegen (33) aus (38), indem man β durch $-\beta$ und ω_1 durch ω_1' ersetzt und das Vorzeichen nach (34) berücksichtigt.

Tabelle 5. *Die längs der Geraden $x = a$ (Fall c) geltenden Ausdrücke A, B, C, D, E, F für die Beanspruchungsarten I bis V*

	A	B	C	D
I	$\frac{P}{a}$	0	$\frac{P}{a}$	$-2(\operatorname{tg}\omega_1+\beta)\frac{P}{a}$
II	0	$\frac{Q}{a}$	$2(\operatorname{tg}\omega_1+\beta)\frac{Q}{a}$	$\frac{Q}{a}$
III	$-\frac{4\beta}{1+4\beta^2}\frac{Q}{a}$	$\frac{1-4\beta^2}{1+4\beta^2}\frac{Q}{a}$	$2(\operatorname{tg}\omega_1-\beta)\frac{Q}{a}$	$\frac{Q}{a}$
IV	$-\frac{2}{1+4\beta^2}\frac{M}{a^2}$	$-\frac{4\beta}{1+4\beta^2}\frac{M}{a^2}$	$-2\frac{M}{a^2}$	0
V	$-2\beta C_2$	C_2	0	$(1+4\beta^2)C_2$

	E
I	$\mathfrak{Cof}\,\beta\left(\frac{\pi}{2}-\omega_1\right)\sin(\beta\ln\lvert\sin\omega_1\rvert)\frac{P}{a}$
II	$\mathfrak{Cof}\,\beta\left(\frac{\pi}{2}-\omega_1\right)\cos(\beta\ln\lvert\sin\omega_1\rvert)\frac{Q}{a}$
III	$\left\{8\beta\operatorname{tg}\omega_1\cos(\beta\ln\lvert\sin\omega_1\rvert)\,\mathfrak{Sin}\,\beta\left(\frac{\pi}{2}-\omega_1\right)-[4\beta\sin(\beta\ln\lvert\sin\omega_1\rvert)-(1-4\beta^2)\cos(\beta\ln\lvert\sin\omega_1\rvert)]\,\mathfrak{Cof}\,\beta\left(\frac{\pi}{2}-\omega_1\right)\right\}\frac{Q/a}{1+4\beta^2}$
IV	$\left\{2\operatorname{tg}\omega_1\cos(\beta\ln\lvert\sin\omega_1\rvert)\,\mathfrak{Sin}\,\beta\left(\frac{\pi}{2}-\omega_1\right)-[\sin(\beta\ln\lvert\sin\omega_1\rvert)+2\beta\cos(\beta\ln\lvert\sin\omega_1\rvert)]\,\mathfrak{Cof}\,\beta\left(\frac{\pi}{2}-\omega_1\right)\right\}\frac{2M/a^2}{1+4\beta^2}$
V	$\left\{2\operatorname{tg}\omega_1\sin(\beta\ln\lvert\sin\omega_1\rvert)\,\mathfrak{Sin}\,\beta\left(\frac{\pi}{2}-\omega_1\right)-[2\beta\sin(\beta\ln\lvert\sin\omega_1\rvert)-\cos(\beta\ln\lvert\sin\omega_1\rvert)]\,\mathfrak{Cof}\,\beta\left(\frac{\pi}{2}-\omega_1\right)\right\}C_2$

	F
I	$\mathfrak{Sin}\,\beta\left(\frac{\pi}{2}-\omega_1\right)\cos(\beta\ln\lvert\sin\omega_1\rvert)\frac{P}{a}$
II	$-\mathfrak{Sin}\,\beta\left(\frac{\pi}{2}-\omega_1\right)\sin(\beta\ln\lvert\sin\omega_1\rvert)\frac{Q}{a}$
III	$-\left\{8\beta\operatorname{tg}\omega_1\sin(\beta\ln\lvert\sin\omega_1\rvert)\,\mathfrak{Cof}\,\beta\left(\frac{\pi}{2}-\omega_1\right)+[4\beta\cos(\beta\ln\lvert\sin\omega_1\rvert)+(1-4\beta^2)\sin(\beta\ln\lvert\sin\omega_1\rvert)]\,\mathfrak{Sin}\,\beta\left(\frac{\pi}{2}-\omega_1\right)\right\}\frac{Q/a}{1+4\beta^2}$
IV	$-\left\{2\operatorname{tg}\omega_1\sin(\beta\ln\lvert\sin\omega_1\rvert)\,\mathfrak{Cof}\,\beta\left(\frac{\pi}{2}-\omega_1\right)-[2\beta\sin(\beta\ln\lvert\sin\omega_1\rvert)-\cos(\beta\ln\lvert\sin\omega_1\rvert)]\,\mathfrak{Sin}\,\beta\left(\frac{\pi}{2}-\omega_1\right)\right\}\frac{2M/a^2}{1+4\beta^2}$
V	$\left\{2\operatorname{tg}\omega_1\cos(\beta\ln\lvert\sin\omega_1\rvert)\,\mathfrak{Cof}\,\beta\left(\frac{\pi}{2}-\omega_1\right)-[\sin(\beta\ln\lvert\sin\omega_1\rvert)+2\beta\cos(\beta\ln\lvert\sin\omega_1\rvert)]\,\mathfrak{Sin}\,\beta\left(\frac{\pi}{2}-\omega_1\right)\right\}C_2$

Tabelle 4. *Die längs der y-Achse (Fall b) geltenden Ausdrücke A, B, C, D, E, F für die Beanspruchungsarten I bis V*

	A	B	C	D	E	F
I	$\frac{P}{a}$	0	0	$-(\operatorname{tg}\omega_1+2\beta)\frac{P}{a}$	0	$\mathfrak{Sin}\,\beta\,(\pi-2\,\omega_1)\,\frac{P}{a}$
II	0	$\frac{Q}{a}$	$(\operatorname{tg}\omega_1+2\beta)\frac{Q}{a}$	0	$\mathfrak{Cof}\,\beta\,(\pi-2\,\omega_1)\frac{Q}{a}$	0
III	0	$\frac{1-4\beta^2}{1+4\beta^2}\frac{Q}{a}$	$(\operatorname{tg}\omega_1-2\beta)\frac{Q}{a}$	0	$[4\beta\operatorname{tg}\omega_1\,\mathfrak{Sin}\,\beta\,(\pi-2\,\omega_1)+(1-4\beta^2)\mathfrak{Cof}\,\beta\,(\pi-2\,\omega_1)]\frac{Q/a}{1+4\beta^2}$	0
IV	0	$-\frac{4\beta}{1+4\beta^2}\frac{M}{a^2}$	$-2\frac{M}{a^2}$	0	$[\operatorname{tg}\omega_1\,\mathfrak{Sin}\,\beta\,(\pi-2\,\omega_1)-2\beta\,\mathfrak{Cof}\,\beta\,(\pi-2\,\omega_1)]\frac{2\,M/a^2}{1+4\beta^2}$	0
V	$-2\beta\,C_2$	0	0	$(1+4\beta^2)\,C_2$	0	$[\operatorname{tg}\omega_1\mathfrak{Cof}\,\beta\,(\pi-2\,\omega_1)-2\beta\,\mathfrak{Sin}\,\beta\,(\pi-2\omega_1)]\,C_2$

Tabelle 6. *Die längs des sehr kleinen, um den Punkt $x=a$ gelegten Kreises vom Radius ϱ (Fall d) geltenden Ausdrücke A, B, C, D, E, F für die Beanspruchungsarten I bis V*

	A	B	C	D	E	F
I	$\frac{P}{a}$	0	$\frac{P}{a}$	$-2\beta\frac{P}{a}$	$\mathfrak{Cof}\,\beta\,\omega_2\sin\left(\beta\ln\frac{\varrho}{2\,a}\right)\frac{P}{a}$	$\mathfrak{Sin}\,\beta\,\omega_2\cos\left(\beta\ln\frac{\varrho}{2\,a}\right)\frac{P}{a}$
II	0	$\frac{Q}{a}$	$2\beta\frac{Q}{a}$	$\frac{Q}{a}$	$\mathfrak{Cof}\,\beta\,\omega_2\cos\left(\beta\ln\frac{\varrho}{2\,a}\right)\frac{Q}{a}$	$-\mathfrak{Sin}\,\beta\,\omega_2\sin\left(\beta\ln\frac{\varrho}{2\,a}\right)\frac{Q}{a}$
III	$-\frac{4\beta}{1+4\beta^2}\frac{Q}{a}$	$\frac{1-4\beta^2}{1+4\beta^2}\frac{Q}{a}$	$-2\beta\frac{Q}{a}$	$\frac{Q}{a}$	$-\mathfrak{Cof}\,\beta\,\omega_2\left[4\beta\sin\left(\beta\ln\frac{\varrho}{2\,a}\right)-(1-4\beta^2)\cos\left(\beta\ln\frac{\varrho}{2\,a}\right)\right]\frac{Q/a}{1+4\beta^2}$	$-\mathfrak{Sin}\,\beta\,\omega_2\left[4\beta\cos\left(\beta\ln\frac{\varrho}{2\,a}\right)+(1-4\beta^2)\sin\left(\beta\ln\frac{\varrho}{2\,a}\right)\right]\frac{Q/a}{1+4\beta^2}$
IV	$-\frac{2}{1+4\beta^2}\frac{M}{a^2}$	$-\frac{4\beta}{1+4\beta^2}\frac{M}{a^2}$	$-2\frac{M}{a^2}$	0	$-\mathfrak{Cof}\beta\,\omega_2\left[\sin\left(\beta\ln\frac{\varrho}{2\,a}\right)+2\beta\cos\left(\beta\ln\frac{\varrho}{2\,a}\right)\right]\frac{2\,M/a^2}{1+4\beta^2}$	$-\mathfrak{Sin}\,\beta\,\omega_2\left[\cos\left(\beta\ln\frac{\varrho}{2\,a}\right)-2\beta\sin\left(\beta\ln\frac{\varrho}{2\,a}\right)\right]\frac{2\,M/a^2}{1+4\beta^2}$
V	$-2\beta\,C_2$	C_2	0	$(1+4\beta^2)\,C_2$	$\mathfrak{Cof}\,\beta\,\omega_2\left[\cos\left(\beta\ln\frac{\varrho}{2\,a}\right)-2\beta\sin\left(\beta\ln\frac{\varrho}{2\,a}\right)\right]C_2$	$-\mathfrak{Sin}\,\beta\,\omega_2\left[\sin\left(\beta\ln\frac{\varrho}{2\,a}\right)+2\beta\cos\left(\beta\ln\frac{\varrho}{2\,a}\right)\right]C_2$

Im Fall c) gilt

$$\left.\begin{aligned}
\tau_1 &= -\frac{\cos\omega_1}{2\pi\sqrt{\sin\omega_1}}\left\langle \frac{\cos\omega_1}{2}\, e^{\beta\left(\frac{\pi}{2}-\omega_1\right)}\left\{C\sin\left[\beta\ln\sin\omega_1+\frac{3}{2}\left(\omega_1+\frac{\pi}{2}\right)\right],\right.\right.\\
&\quad \left.\left.+D\cos\left[\beta\ln\sin\omega_1+\frac{3}{2}\left(\omega_1+\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}+E\sin\frac{1}{2}\left(\omega_1+\frac{\pi}{2}\right)-F\cos\frac{1}{2}\left(\omega_1+\frac{\pi}{2}\right)\right\rangle,\\
(\sigma_y)_1+(\sigma_x)_1 &= -\frac{\cos\omega_1}{\pi\sqrt{\sin\omega_1}}\, e^{\beta\left(\frac{\pi}{2}-\omega_1\right)}\left\{(A+2C_2\operatorname{tg}\omega_1)\sin\left[\beta\ln\sin\omega_1+\frac{1}{2}\left(\omega_1+\frac{\pi}{2}\right)\right]\right.\\
&\quad \left.+(B-2C_1\operatorname{tg}\omega_1)\cos\left[\beta\ln\sin\omega_1+\frac{1}{2}\left(\omega_1+\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}+\frac{2}{\pi}C_2+\sigma_{01},\\
(\sigma_y)_1-(\sigma_x)_1 &= -\frac{\cos\omega_1}{\pi\sqrt{\sin\omega_1}}\left\langle \frac{\cos\omega_1}{2}\, e^{\beta\left(\frac{\pi}{2}-\omega_1\right)}\left\{D\sin\left[\beta\ln\sin\omega_1+\frac{3}{2}\left(\omega_1+\frac{\pi}{2}\right)\right]\right.\right.\\
&\quad \left.\left.-C\cos\left[\beta\ln\sin\omega_1+\frac{3}{2}\left(\omega_1+\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\}-F\sin\frac{1}{2}\left(\omega_1+\frac{\pi}{2}\right)\right.\\
&\quad \left.-E\cos\frac{1}{2}\left(\omega_1+\frac{\pi}{2}\right)\right\rangle-\frac{2}{\pi}C_2-\sigma_{01}.
\end{aligned}\right\} \tag{39}$$

A, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* sind in Tabelle 5 enthalten.

Für die untere Halbscheibe braucht man lediglich β durch $-\beta$ sowie ω_1 durch ω_1' zu ersetzen und das durch (34) festgesetzte Vorzeichen zu verwenden.

Schließlich bekommt man im Fall d)

$$\left.\begin{aligned}
\tau_1 &= -\frac{1}{\pi\sqrt{\frac{2\varrho}{a}}}\left\{\frac{\sin\omega_2}{2}\, e^{\beta\omega_2}\left[C\sin\left(\beta\ln\frac{\varrho}{2a}+\frac{3}{2}\omega_2\right)+D\cos\left(\beta\ln\frac{\varrho}{2a}+\frac{3}{2}\omega_2\right)\right]\right.\\
&\quad \left.+E\sin\frac{\omega_2}{2}-F\cos\frac{\omega_2}{2}\right\},\\
(\sigma_y)_1+(\sigma_x)_1 &= -\frac{2}{\pi}\,\frac{e^{\beta\omega_2}}{\sqrt{\frac{2\varrho}{a}}}\left[A\sin\left(\beta\ln\frac{\varrho}{2a}+\frac{\omega_2}{2}\right)+B\cos\left(\beta\ln\frac{\varrho}{2a}+\frac{\omega_2}{2}\right)\right]\\
&\quad +\frac{2}{\pi}C_2+\sigma_{01},\\
(\sigma_y)_1-(\sigma_x)_1 &= -\frac{2}{\pi\sqrt{\frac{2\varrho}{a}}}\left\{\frac{\sin\omega_2}{2}\, e^{\beta\omega_2}\left[D\sin\left(\beta\ln\frac{\varrho}{2a}+\frac{3}{2}\omega_2\right)-C\cos\left(\beta\ln\frac{\varrho}{2a}+\frac{3}{2}\omega_2\right)\right]\right.\\
&\quad \left.-F\sin\frac{\omega_2}{2}-E\cos\frac{\omega_2}{2}\right\}-\frac{2}{\pi}C_2-\sigma_{01}.
\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

A, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* sind in Tabelle 6 zusammengestellt. Die Spannungen in der unteren Halbscheibe folgen sofort aus (40), indem man β durch $-\beta$ und ω_2 durch ω_2' unter Beachtung von (34) ersetzt.

Die Formeln (40) gestatten die Untersuchung des Spannungszustandes in unmittelbarer Umgebung des Eckpunkts $(a, 0)$. Nähert man sich diesem Punkt auf der Geraden $\omega_2 = \text{konst.}$, so sieht man, daß die Spannungen im wesentlichen Terme von der Form

$$\frac{\sin\left(\beta\ln\frac{\varrho}{2a}+\text{konst.}\right)}{\sqrt{\frac{2\varrho}{a}}} \quad \text{und} \quad \frac{\cos\left(\beta\ln\frac{\varrho}{2a}+\text{konst.}\right)}{\sqrt{\frac{2\varrho}{a}}}$$

enthalten. Für $\varrho \to 0$ strebt der Nenner gegen Null; gleichzeitig aber zeigt der Zähler ein eigentümliches Verhalten: Er ändert bei Annäherung an den Punkt $\varrho = 0$ unendlich mal sein Vorzeichen. Dieser Effekt ist allerdings auf eine außerordentlich kleine Umgebung dieses Punktes beschränkt.

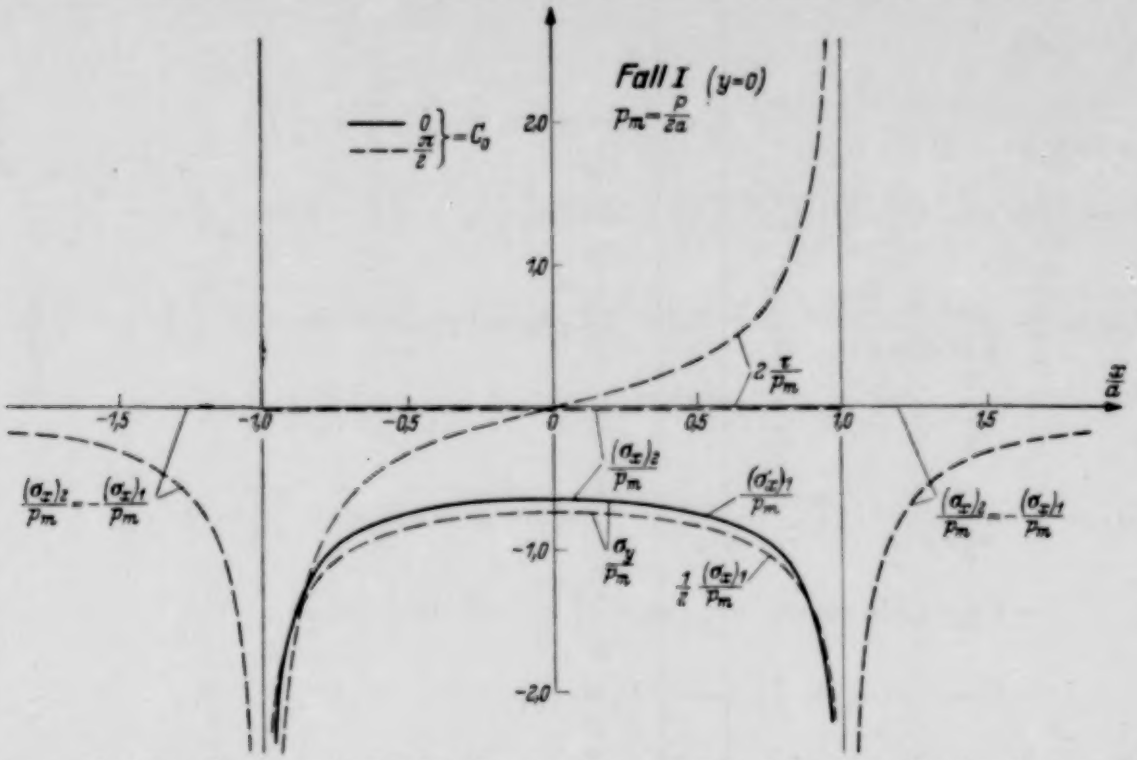


Abb. 6. Spannungsverlauf längs der x-Achse im Fall *I* für $C_0 = 0$ und $C_0 = \pi/2$ (Index *1* bzw. *2* für die obere bzw. untere Halbscheibe).

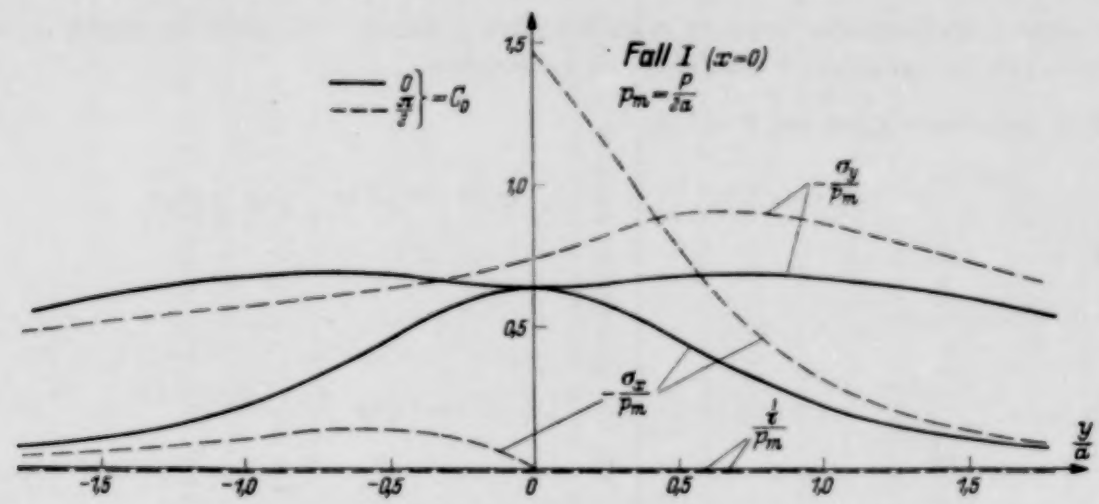


Abb. 7. Spannungsverlauf längs der y-Achse im Fall *I* für $C_0 = 0$ und $C_0 = \pi/2$.

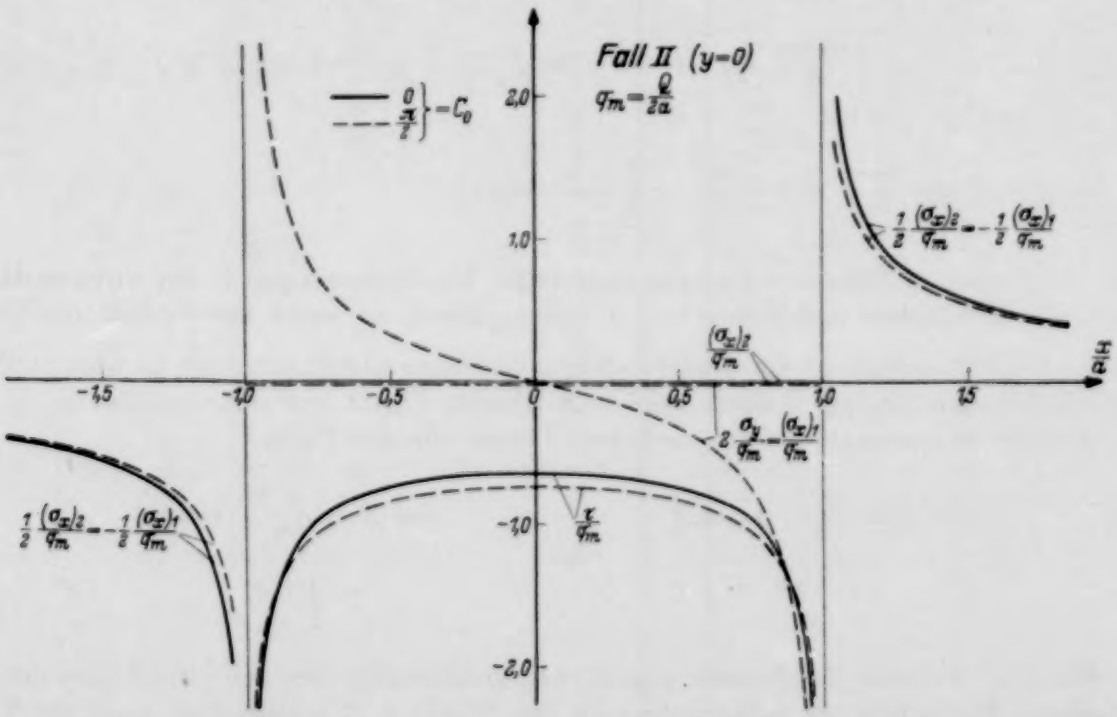


Abb. 8. Spannungsverlauf längs der *x*-Achse im Fall *II* für $C_0 = 0$ und $C_0 = \pi/2$ (Index *1* bzw. *2* für die obere bzw. untere Halbscheibe)

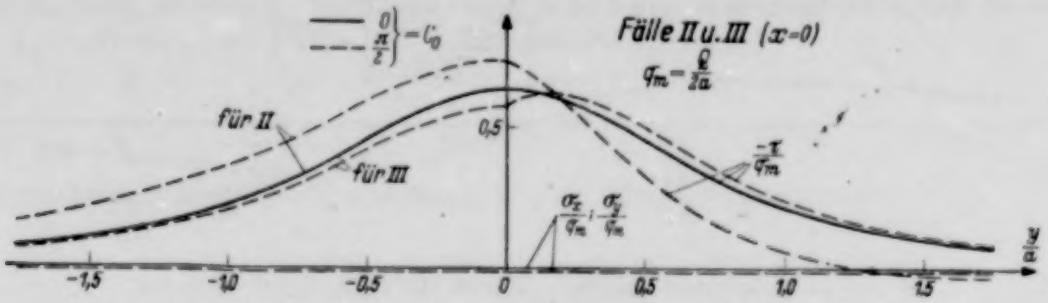


Abb. 9. Spannungsverlauf längs der y-Achse in den Fällen *II* und *III* für $C_0 = 0$ und $C_0 = \pi/2$.

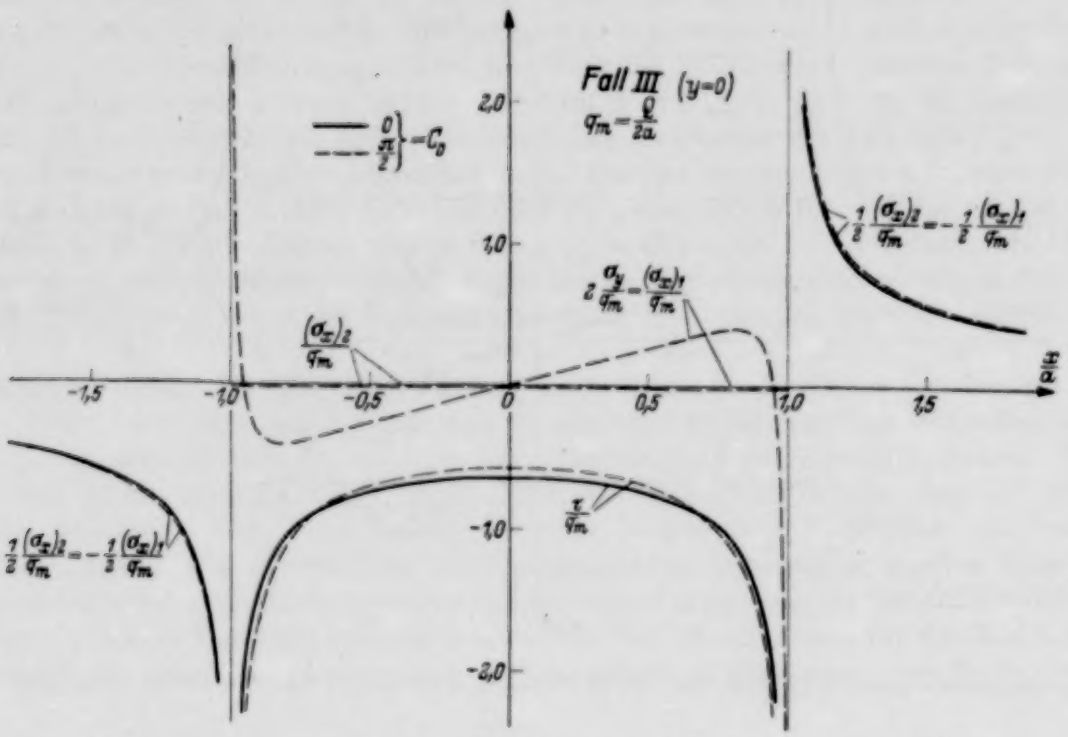


Abb. 10. Spannungsverlauf längs der *x*-Achse im Fall *III* für $C_0 = 0$ und $C_0 = \pi/2$ (Index *1* bzw. *2* für die obere bzw. untere Halbscheibe).

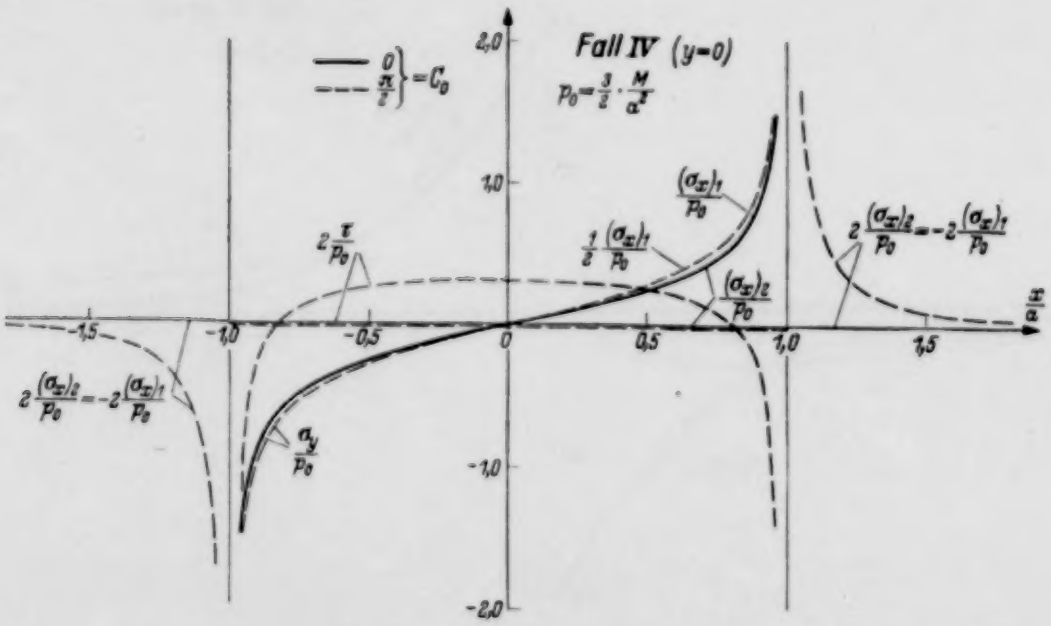


Abb. 11. Spannungsverlauf längs der *x*-Achse im Fall *IV* für $C_0 = 0$ und $C_0 = \pi/2$ (Index *1* bzw. *2* für die obere bzw. untere Halbscheibe).

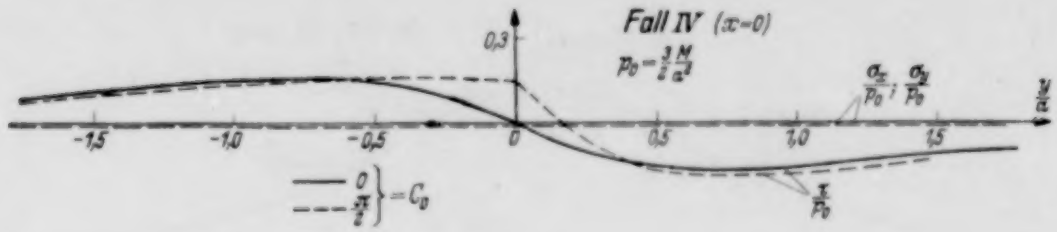


Abb. 12. Spannungsverlauf längs der y-Achse im Fall *IV* für $C_0 = 0$ und $C_0 = \pi/2$.

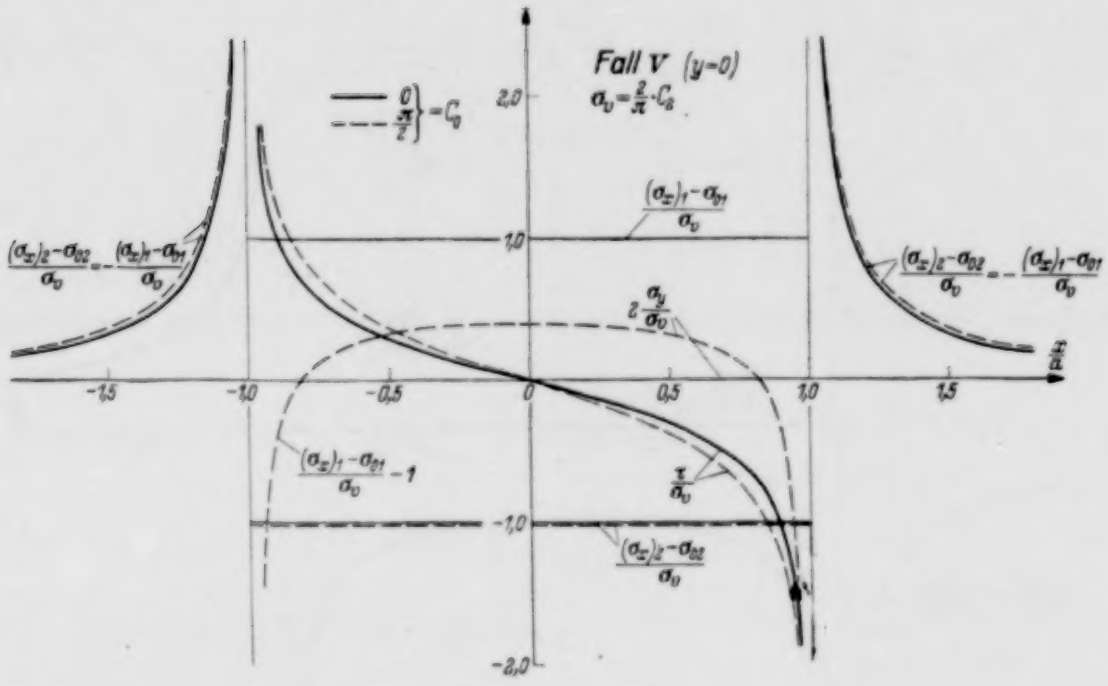


Abb. 13. Spannungsverlauf längs der *x*-Achse im Fall *V* für $C_0 = 0$ und $C_0 = \pi/2$ (Index *1* bzw. *2* für die obere bzw. untere Halbscheibe).

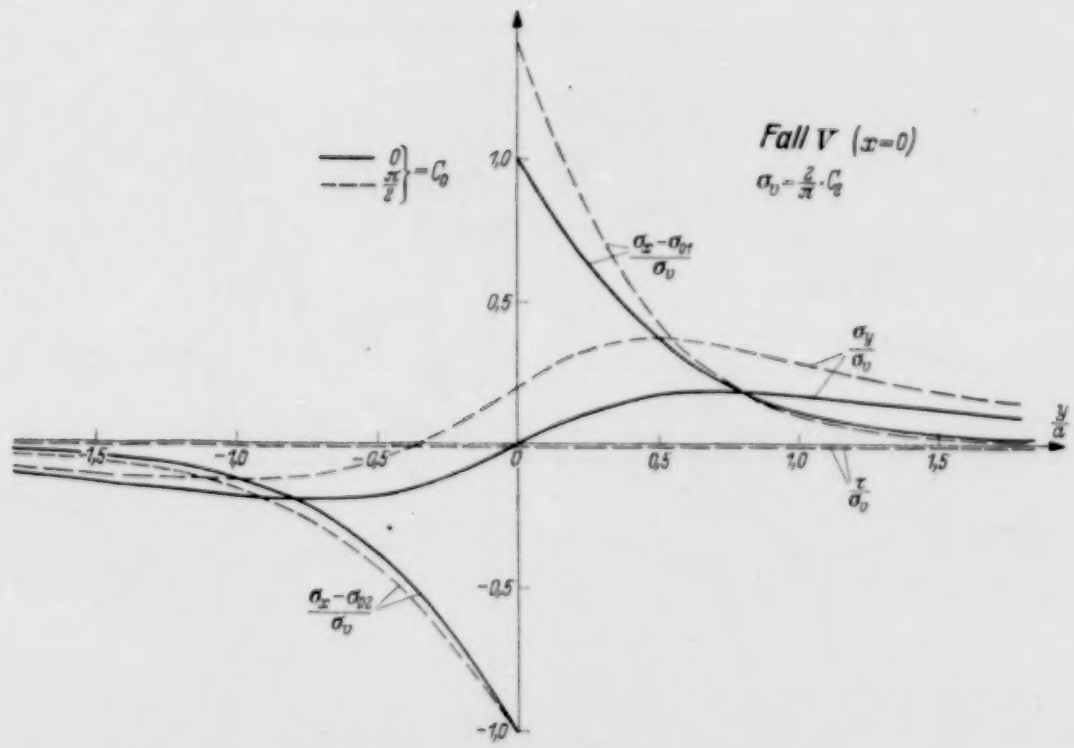


Abb. 14. Spannungsverlauf längs der *y*-Achse im Fall *V* für $C_0 = 0$ und $C_0 = \pi/2$.

Betrachtet man beispielsweise die Funktion $\cos[\beta \ln(\varrho/2a)]$, so erkennt man, daß die hier in Frage kommende, am weitesten vom Punkt $\varrho = 0$ entfernte Nullstelle bei

$$\frac{\varrho}{2a} = e^{-\frac{\pi}{2\beta}}$$

ist; für den größtmöglichen β-Wert, nämlich $\beta = (\ln 3)/2\pi$, bekommt man

$$\frac{\varrho}{2a} = e^{-\frac{\pi^2}{\ln 3}} = 1{,}25 \cdot 10^{-4}.$$

Der oszillierende Spannungsverlauf ist nur vorhanden, wenn $\beta \neq 0$ ist, d. h. wenn beide Halbscheiben aus verschiedenem Material bestehen. Praktisch ist er bedeutungslos, da er in den Bereich sehr großer Spannungen fällt, in dem bei einem wirklichen Werkstoff die Proportionalitätsgrenze meist bereits überschritten ist, so daß die lineare Theorie hier nicht mehr zutrifft.

Um einen Einblick in den Verlauf der Spannungen zu bekommen, wurden diese längs der x-Achse und längs der y-Achse numerisch ausgewertet, und zwar für die fünf betrachteten Belastungsarten *I* bis *V*. Die ausgezogenen Kurven gelten dabei für $\beta = 0$ (d. h. $C_0 = 0$), die gestrichelten für $\beta = (\ln 3)/2\pi$ (d. h. $C_0 = \pi/2$); sie stellen die möglichen Extremkurven dar, falls $\beta \geqq 0$. Ist $\beta \leqq 0$, dann vertauschen die beiden Halbscheiben ihre Rolle. Die Spannungen wurden dadurch dimensionslos gemacht, daß sie im Fall *I* (Abb. 6, 7) mit dem mittleren Druck $p_m = P/2a$, in den Fällen *II* und *III* (Abb. 8, 9, 10) mit dem mittleren Schub $q_m = Q/2a$, im Fall *IV* (Abb. 11, 12) mit der Druckspannung $p_0 = (3/2)\, M/a^2$ (dieser Wert gilt bei linearer Spannungsverteilung bei $x = -a$) und im Fall *V* (Abb. 13, 14) mit der Vergleichsspannung $\sigma_v = (2/\pi)\, C_2$ dividiert wurden.

7. Zusammenfassung. Für beliebige Punkte eines ebenen Verbundkörpers, der aus zwei verschiedenen, längs einer endlichen Strecke fest miteinander in Verbindung stehenden elastischen Halbscheiben zusammengesetzt ist, wird der Spannungszustand vollständig bestimmt. Es werden fünf Belastungsarten diskutiert, nämlich *I.* reiner zentrischer Druck bzw. Zug, *II.* Schub ohne Verdrehungsmöglichkeit, *III.* reiner Schub, *IV.* reine Verdrehung, *V.* Wärme- und Vorspannungen. Um einen Einblick in den Verlauf der Spannungen zu bekommen, wurden diese längs der Berandung und längs der Symmetriegeraden für die beiden möglichen Extremfälle (beide Scheiben bestehen aus demselben Material; eine der beiden Scheiben ist starr) und für die fünf betrachteten Belastungsarten numerisch ausgewertet und in Diagrammen in dimensionsloser Form niedergelegt.

(Eingegangen am 27. August 1959.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Hans Bufler*, München, Arcisstraße 21
Institut für Techn. Mechanik der Techn. Hochschule.

Zur homogenen Maschine mit Zusatzdrehmassen

Von **H. Bufler** und **F. Kießling**

1. Einleitung. Ein Drehschwingungssystem, bei dem sämtliche Drehmassen und Federkonstanten einander gleich sind, wird als homogene Maschine bezeichnet. Die Eigenfrequenzen und Schwingungsformen können in diesem Sonderfall — selbst für beliebig viele Massen — explizit durch einfache trigonometrische Formeln angegeben werden[1] oder aus den Nullstellen der *Grammel*schen Frequenzfunktionen[2] bestimmt werden.

Falls an den Enden des homogenen Teiles der Maschine zusätzliche, von den übrigen verschiedene Drehmassen und Federkonstanten vorhanden sind, führt die Berechnung der Eigenfrequenzen bei Verwendung der trigonometrischen Darstellungsform auf transzendente Gleichungen, die numerisch oder graphisch zu lösen sind. Für insgesamt N Drehmassen müssen sich, wie bekannt, $N-1$ Eigenfrequenzen ergeben. Die Durchrechnung praktischer Beispiele zeigt indessen, daß für gewisse Zahlendaten dieses Verfahren bei alleiniger Berücksichtigung der reellen Lösungen eine oder mehrere Frequenzen zu wenig liefert. In diesem Fall haben die transzendenten Gleichungen für die Eigenwerte neben den reellen auch komplexe Lösungen[3], welche die restlichen — es handelt sich hierbei stets um die höchsten — Frequenzen liefern.

Das *Grammel*sche Verfahren ergibt bei Benützung der Frequenzfunktionen in der ursprünglichen Form eines Polynoms[4] des Eigenwertes ζ sämtliche Frequenzen. Während bei der rein homogenen Maschine stets $0 < \zeta < 4$ ist, können beim Vorhandensein von Zusatzdrehmassen durchaus Werte von ζ auftreten, die größer als vier sind. Dieses ist immer dann der Fall, wenn die trigonometrische Darstellung zu komplexen Lösungen führt[5].

Da die *Grammel*schen Frequenzfunktionen nur für den Bereich $0 \leqq \zeta \leqq 4$ tabelliert sind, andererseits die trigonometrische Darstellung auch gewisse Vorzüge besitzt, soll letztere der vorliegenden Arbeit zugrunde gelegt werden. Unter Beschränkung auf eine oder zwei Zusatzdrehmassen werden die Bedingungen untersucht, bei denen komplexe Eigenwerte auftreten, ferner die zu ihrer Bestimmung benötigten Gleichungen sowie die Ausdrücke für die Momente und Drehwinkel angegeben.

Bei den Kurbelwellen von Verbrennungsmotoren hängt die Differenz der Drehwinkel zweier benachbarter Drehmassen nicht nur von dem zwischen ihnen wirkenden Drehmoment, sondern auch von allen übrigen Drehmomenten ab. Die Beiträge, welche diese Drehmomente zur Gesamttorsion liefern, werden als Nebentorsionen[6] bezeichnet. Diese haben auf die Grundfrequenz geringen, auf die höheren Frequenzen u. U. wesentlichen Einfluß.

In nachstehender Untersuchung werden die Nebentorsionen nicht betrachtet, so daß die gewonnenen Ergebnisse nicht auf Schwingungssysteme angewendet werden dürfen, bei denen diese eine Rolle spielen. Mit der trigonometrischen Methode lassen sich aber auch diese Fälle erfassen, wie in einer demnächst erscheinenden Arbeit der Verfasser gezeigt werden wird.

2. Grundgleichungen. Bedeuten Θ_k bzw. φ_k das polare Massenträgheitsmoment bzw. den Drehwinkel der k-ten Scheibe, c_k bzw. M_k die Drehfederkonstante bzw. das Torsionsmoment zwischen der k-ten und der $(k+1)$-ten Scheibe gemäß Abb. 1, so liefert das Momentengleichgewicht an der k-ten Scheibe

$$M_k - M_{k-1} = \Theta_k \ddot{\varphi}_k \qquad (k = 1, 2, \ldots N)\,. \tag{1}$$

Außerdem gilt die Formänderungsbeziehung

$$M_k = c_k (\varphi_{k+1} - \varphi_k)\,. \tag{2}$$

[1] *P. Funk*, Z. angew. Math. Mech. 15 (1935) S. 113.
[2] *Biezeno-Grammel*, Technische Dynamik, 2. Auflage, Bd. 2, S. 367 ff, Berlin 1953.
[3] Hierauf geben *Th. Pöschl* und *L. Collatz*, Z. angew. Math. Mech. 18, (1938) S. 186, einen Hinweis.
[4] *R. Grammel*, Ing.-Arch. 2 (1931) S. 228.
[5] Der Zusammenhang zwischen dem Eigenwert x, der bei der im folgenden verwendeten trigonometrischen Darstellungsform auftritt, und dem Eigenwert ζ bei *Grammel* ist gegeben durch $\zeta = 2(1 - \cos x)$.
[6] Auf ihre Bedeutung für die Berechnung der Eigenfrequenzen von Mehrzylindermaschinen hat erstmals *R. Grammel*, Ing.-Arch. 4 (1933) S. 287 hingewiesen; vgl. auch *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik, Bd. 2, S. 349, S. 361 und S. 416, 2. Aufl. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953.

Die Elimination des Drehwinkels führt zu

$$\frac{\ddot{M}_k}{c_k} + \left(\frac{1}{\Theta_k} + \frac{1}{\Theta_{k+1}}\right) M_k - \frac{M_{k-1}}{\Theta_k} - \frac{M_{k+1}}{\Theta_{k+1}} = 0\,, \tag{3}$$

und mit dem Ansatz

$$M_k = \bar{M}_k \cdot \sin \omega t \tag{4}$$

(ω Kreisfrequenz der Eigenschwingung, t Zeit)

erhält man die Rekursionsformel für die Momente

$$\frac{M_{k-1}}{\Theta_k} - \left(\frac{1}{\Theta_k} + \frac{1}{\Theta_{k+1}} - \frac{\omega^2}{c_k}\right) M_k + \frac{M_{k+1}}{\Theta_{k+1}} = 0\,. \tag{5}$$

Diese Darstellung, welche auf *H. Neuber*[1] zurückgeht, gestattet gegenüber der sonst meist verwendeten entsprechenden Beziehung für die Drehwinkel eine einfachere Berücksichtigung der Randbedingungen. Die Rekursionsformel für die Drehwinkel, die man aus (1) und (2) nach Elimination der Momente erhält, lautet:

$$c_{k-1}\,\varphi_{k-1} - (c_k + c_{k-1} - \omega^2\,\Theta_k)\,\varphi_k + c_k\,\varphi_{k+1} = 0\,. \tag{6}$$

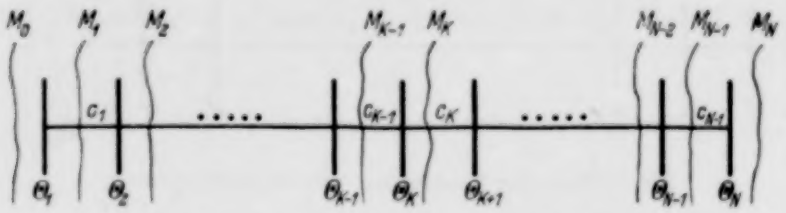


Abb. 1. Allgemeines Drehschwingungssystem mit N Massen.

Für den homogenen Teil einer Maschine vereinfacht sich (5) wegen $\Theta_k = \Theta$ und $c_k = c$ zu

$$M_{k-1} - \left(2 - \omega^2 \frac{\Theta}{c}\right) M_k + M_{k+1} = 0\,. \tag{5'}$$

Diese Differenzengleichung läßt bekanntlich die einfache Lösung

$$M_k = C \sin(k\,x + \gamma) \cdot \sin \omega t \tag{7}$$

(C beliebige Konstante)

zu, falls man

$$2 - \omega^2 \frac{\Theta}{c} = 2 \cos x\,,$$

also

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{c}{\Theta}} \sin \frac{x}{2} \tag{8}$$

setzt. Die Größen x und γ sind dabei durch die Randbedingungen festzulegen. Für den Winkelausschlag φ_k der k-ten Masse gilt

$$\varphi_k = -\frac{C}{2\,c \sin \frac{x}{2}} \cos\left[\left(k - \frac{1}{2}\right) x + \gamma\right] \cdot \sin \omega t\,, \tag{9}$$

wie man durch Einsetzen von (9) und (7) in (2) nachweisen kann.

Um die Konstante C aus (7) und (9) zu entfernen, ist es zweckmäßig, das Momenten- bzw. Drehwinkelverhältnis M_k/M_1 und φ_k/φ_1 zu bilden:

$$\frac{M_k}{M_1} = \frac{\sin(k\,x + \gamma)}{\sin(x + \gamma)}\,, \tag{10}$$

$$\frac{\varphi_k}{\varphi_1} = \frac{\cos\left[\left(k - \frac{1}{2}\right) x + \gamma\right]}{\cos\left(\frac{x}{2} + \gamma\right)}\,. \tag{11}$$

[1] *H. Neuber*, Ing.-Arch. 22 (1954) S. 258.

3. Die homogene Maschine mit einer Zusatzdrehmasse. Der homogene Teil der Maschine besitze n Massen[1], die Zusatzmasse sei mit Θ_{n+1}, die dazugehörige Federkonstante mit c_n bezeichnet (Abb. 2). Für den homogenen Teil einschließlich der Momente M_0 und M_n gilt (7); die Zusatzmasse wird durch (5) mit $k = n$ erfaßt:

$$\frac{M_{n-1}}{\Theta} - \left(\frac{1}{\Theta} + \frac{1}{\Theta_{n+1}} - \frac{\omega^2}{c_n}\right) M_n + \frac{M_{n+1}}{\Theta_{n+1}} = 0 . \tag{12}$$

Aus der Randbedingung $M_0 = 0$ (links freies Ende) folgt mit (7)

$$\gamma = 0 .$$

Die zweite Randbedingung $M_{n+1} = 0$ (rechts freies Ende) liefert aus (12), wenn man dort die Momente M_n und M_{n-1} aus (7) einführt und ω^2 durch x entsprechend (8) ausdrückt, die Bestimmungsgleichung für die Eigenwerte x

$$\left(1 + \frac{\Theta}{\Theta_{n+1}} - 4\,\frac{c}{c_n}\sin^2\frac{x}{2}\right)\sin n\,x - \sin(n-1)\,x = 0 . \tag{13}$$

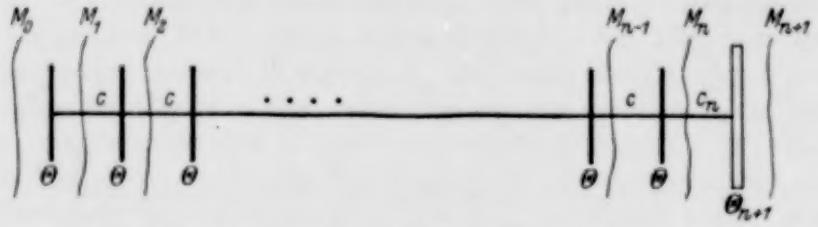


Abb. 2. Homogene Maschine mit einer Zusatzdrehmasse.

In gewissen Fällen, d. h. immer dann, wenn im Bereich $0 < x < \pi$ weniger als $N - 1$ Eigenwerte liegen[2], existiert neben reellen Lösungen dieser Gleichung auch eine komplexe; mit

$$x = \alpha + i\,\beta \qquad (\alpha, \beta \text{ reell})$$

liefert der Realteil der Gleichung (13) den (physikalisch allein sinnvollen) Wert

$$\alpha = \pi ,$$

womit der Imaginärteil von (13) zu folgender Bestimmungsgleichung für β führt:

$$\left(1 + \frac{\Theta}{\Theta_{n+1}} - 4\,\frac{c}{c_n}\operatorname{Cof}^2\frac{\beta}{2}\right)\operatorname{Sin} n\,\beta + \operatorname{Sin}(n-1)\,\beta = 0 . \tag{14}$$

Die Formeln für die Eigenfrequenz, das Torsionsmoment und den Drehwinkel gehen mit $\gamma = 0$ und $x = \pi + i\,\beta$ über in

$$\omega = 2\sqrt{\frac{c}{\Theta}}\operatorname{Cof}\frac{\beta}{2} , \tag{15}$$

$$\frac{M_k}{M_1} = (-1)^{k+1}\,\frac{\operatorname{Sin} k\beta}{\operatorname{Sin}\beta} \qquad (k = 1, 2 \ldots n) , \tag{16}$$

$$\frac{\varphi_k}{\varphi_1} = (-1)^{k+1}\,\frac{\operatorname{Sin}\left(k - \frac{1}{2}\right)\beta}{\operatorname{Sin}\frac{\beta}{2}} \qquad (k = 1, 2 \ldots n) . \tag{17}$$

Der Drehwinkel φ_{n+1} der Zusatzdrehmasse errechnet sich aus (6) mit $k = n + 1$ und mit (15)

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_1} = \frac{\varphi_n}{\varphi_1} \cdot \frac{1}{1 - 4\,\frac{c}{c_n}\,\frac{\Theta_{n+1}}{\Theta}\operatorname{Cof}^2\frac{\beta}{2}} . \tag{17'}$$

---

[1] Die Zahl der Massen im homogenen Teil bezeichnen wir immer mit n, während N die Zahl sämtlicher Massen einer Maschine bedeuten soll.

[2] Die Lösungen $x = m\,\pi$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) sind trivial, da sie keine Schwingung liefern; außerhalb des angegebenen Bereichs liegende Eigenwerte führen wegen der Periodizität der Gl. (13) zu den schon vorher erhaltenen Eigenfrequenzen.

Zwecks Diskussion der Gleichung (14) formen wir sie folgendermaßen um:

$$\underbrace{\mathfrak{Cof}^2\frac{\beta}{2}}_{L} = \underbrace{\frac{c_n}{4c}\left(\frac{\mathfrak{Sin}\,(n-1)\beta}{\mathfrak{Sin}\,n\beta}+1+\frac{\Theta}{\Theta_{n+1}}\right)}_{R}. \tag{18}$$

Die durch jede Gleichungsseite gegebenen Funktionen $L = L(\beta)$ und $R = R(\beta)$ lassen folgende Schlüsse zu:

1. Ist die durch die Ungleichung

$$4\frac{c}{c_n}-\frac{\Theta}{\Theta_{n+1}} < 2-\frac{1}{n} \tag{19}$$

gegebene Bedingung erfüllt, so liefert (13) $N-2$ reelle Eigenwerte und (14) oder (18) den restlichen (höchsten) Eigenwert[1].

2. Ist (19) nicht erfüllt, so liefert (13) sämtliche $N-1$ Eigenwerte [Gleichung (14) hat in diesem Fall keine reelle Lösung für β].

4. Die homogene Maschine mit zwei Zusatzdrehmassen auf einer Seite. Der homogene Teil der Maschine bestehe wieder aus n Massen; am rechten Ende kommen die Zusatzmassen Θ_{n+1} und Θ_{n+2} und die Federkonstanten c_n und c_{n+1} hinzu (Abb. 3). Für die Momente im homogenen

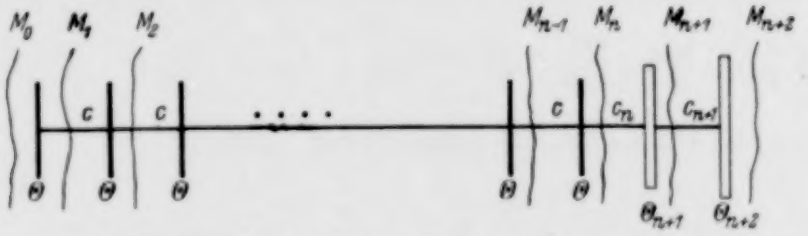


Abb. 3. Homogene Maschine mit zwei Zusatzdrehmassen auf einer Seite.

Teil (einschl. M_0 und M_n) ist (7) zuständig; die beiden Zusatzmassen werden durch die Rekursionsformel (5), angeschrieben für $k = n$ und $k = n+1$, berücksichtigt:

$$\frac{M_{n-1}}{\Theta}-\left(\frac{1}{\Theta}+\frac{1}{\Theta_{n+1}}-\frac{\omega^2}{c_n}\right)M_n+\frac{M_{n+1}}{\Theta_{n+1}}=0\,, \tag{20}$$

$$\frac{M_n}{\Theta_{n+1}}-\left(\frac{1}{\Theta_{n+1}}+\frac{1}{\Theta_{n+2}}-\frac{\omega^2}{c_{n+1}}\right)M_{n+1}+\frac{M_{n+2}}{\Theta_{n+2}}=0\,. \tag{21}$$

Die Randbedingung am linken Ende $M_0 = 0$ ergibt mit (7)

$$\gamma = 0\,.$$

Die Randbedingung am rechten Ende lautet $M_{n+2} = 0$. Eliminiert man nun M_{n+1} in (20) mittels (21) und verwendet für M_{n-1} und M_n die Ausdrücke (7), so folgt mit (8)

$$\left[\left(\frac{\Theta}{\Theta_{n+1}}\right)^2-\left(1+\frac{\Theta}{\Theta_{n+1}}-4\frac{c}{c_n}\sin^2\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\Theta}{\Theta_{n+1}}+\frac{\Theta}{\Theta_{n+2}}-4\frac{c}{c_{n+1}}\sin^2\frac{x}{2}\right)\right]\sin n\,x$$
$$+\left(\frac{\Theta}{\Theta_{n+1}}+\frac{\Theta}{\Theta_{n+2}}-4\frac{c}{c_{n+1}}\sin^2\frac{x}{2}\right)\sin(n-1)\,x=0\,. \tag{22}$$

Zur Ermittlung von etwa vorhandenen komplexen Lösungen dieser Gleichung setzen wir, wie in Ziff. 3,

$$x = \alpha + i\beta \qquad (\alpha, \beta \text{ reell})$$

und erhalten

$$\alpha = \pi$$

[1] Wegen der Symmetrie der Kurven $L = L(\beta)$ und $R = R(\beta)$ bezüglich der Achse $\beta = 0$ ergeben sich zwei Werte für β, die sich nur durch das Vorzeichen unterscheiden, jedoch beide zum selben Ergebnis führen.

sowie

$$\left[\left(\frac{\Theta}{\Theta_{n+1}}\right)^2-\left(1+\frac{\Theta}{\Theta_{n+1}}-4\,\frac{c}{c_n}\,\mathfrak{Cof}^2\,\frac{\beta}{2}\right)\left(\frac{\Theta}{\Theta_{n+1}}+\frac{\Theta}{\Theta_{n+2}}-4\,\frac{c}{c_{n+1}}\,\mathfrak{Cof}^2\,\frac{\beta}{2}\right)\right]\mathfrak{Sin}\,n\beta$$
$$-\left(\frac{\Theta}{\Theta_{n+1}}+\frac{\Theta}{\Theta_{n+2}}-4\,\frac{c}{c_{n+1}}\,\mathfrak{Cof}^2\,\frac{\beta}{2}\right)\mathfrak{Sin}\,(n-1)\,\beta=0\,. \qquad (23)$$

Für ω sowie für M_k und φ_k im homogenen Teil gelten hier die Beziehungen (15), (16) und (17). Das Moment M_{n+1} kann entweder aus (20) oder (21) berechnet werden; aus (21) ergibt sich

$$\frac{M_{n+1}}{M_1}=\frac{(-1)^{n+1}\,\dfrac{\Theta}{\Theta_{n+1}}}{\dfrac{\Theta}{\Theta_{n+1}}+\dfrac{\Theta}{\Theta_{n+2}}-\dfrac{4\,c}{c_{n+1}}\,\mathfrak{Cof}^2\,\dfrac{\beta}{2}}\,\frac{\mathfrak{Sin}\,n\beta}{\mathfrak{Sin}\,\beta}\,. \qquad (16')$$

Für die Drehwinkel φ_{n+1} und φ_{n+2} der Zusatzdrehmassen bekommt man aus (6) mit (15)

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_1}=\frac{\varphi_n}{\varphi_1}\,\frac{1-4\,\dfrac{c}{c_{n-1}}\,\dfrac{\Theta_{n+2}}{\Theta}\,\mathfrak{Cof}^2\,\dfrac{\beta}{2}}{\left(1+\dfrac{c_{n+1}}{c_n}-4\,\dfrac{\Theta_{n+1}}{\Theta}\,\dfrac{c}{c_n}\,\mathfrak{Cof}^2\,\dfrac{\beta}{2}\right)\left(1-4\,\dfrac{c}{c_{n-1}}\,\dfrac{\Theta_{n+2}}{\Theta}\,\mathfrak{Cof}^2\,\dfrac{\beta}{2}\right)-1}\,, \qquad (17'')$$

$$\frac{\varphi_{n+2}}{\varphi_1}=\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_1}\,\frac{1}{1-4\,\dfrac{c}{c_{n+1}}\,\dfrac{\Theta_{n+2}}{\Theta}\,\mathfrak{Cof}^2\,\dfrac{\beta}{2}}\,. \qquad (17''')$$

Zur Diskussion von Gleichung (23) ist folgende Form günstig:

$$\underbrace{4\,\frac{c}{c_n}\,\mathfrak{Cof}^2\,\frac{\beta}{2}+\frac{\left(\dfrac{\Theta}{\Theta_{n+1}}\right)^2}{\dfrac{\Theta}{\Theta_{n+1}}+\dfrac{\Theta}{\Theta_{n+2}}-4\,\dfrac{c}{c_{n+1}}\,\mathfrak{Cof}^2\,\dfrac{\beta}{2}}}_{L}=\underbrace{\frac{\mathfrak{Sin}\,(n-1)\,\beta}{\mathfrak{Sin}\,n\beta}+1+\frac{\Theta}{\Theta_{n+1}}}_{R}\,. \qquad (24)$$

Die Betrachtung der durch jede Gleichungsseite gegebenen Funktionen $L=L(\beta)$ und $R=R(\beta)$ führt zu den Ungleichungen

$$\frac{\Theta}{\Theta_{n+1}}+\frac{\Theta}{\Theta_{n+2}}-4\,\frac{c}{c_{n+1}}>0\,, \qquad (25)$$

$$4\,\frac{c}{c_n}-\frac{\Theta}{\Theta_{n+1}}+\frac{\left(\dfrac{\Theta}{\Theta_{n+1}}\right)^2}{\dfrac{\Theta}{\Theta_{n+1}}+\dfrac{\Theta}{\Theta_{n+2}}-4\,\dfrac{c}{c_{n+1}}}<2-\frac{1}{n}\,, \qquad (26)$$

und es gilt:

1. Falls die Bedingungen (25) und (26) erfüllt sind, liefert (22) $N-3$ Eigenwerte und (24) die restlichen zwei (es handelt sich hier um die beiden höchsten Eigenwerte)[1].

2. Falls eine der Bedingungen (25) oder (26) erfüllt ist, liefert (22) $N-2$ Eigenwerte und (24) den restlichen höchsten Eigenwert.

3. Falls weder (25) noch (26) erfüllt ist, liefert (22) sämtliche Eigenwerte [Gleichung (24) hat in diesem Fall keine reelle Lösung für β].

5. Die homogene Maschine mit je einer Zusatzdrehmasse auf beiden Seiten. Die Zahl der im homogenen Teil der Maschine gelegenen Massen sei wieder n; die linke bzw. rechte Zusatzmasse und Federkonstante seien mit Θ_0 und c_0 (bzw. Θ_{n+1} und c_n) bezeichnet (Abb. 4). Für die Momente,

[1] Sinngemäß gilt auch hier Fußnote 1 von Seite 253.

die im homogenen Teil liegen (einschl. M_0 und M_n), gelten die Beziehungen (7), für die beiden Zusatzmassen die Formel (5) (und zwar mit $k = 0$ und $k = n$):

$$\frac{M_{-1}}{\Theta_0} - \left(\frac{1}{\Theta_0} + \frac{1}{\Theta} - \frac{\omega^2}{c_0}\right) M_0 + \frac{M_1}{\Theta} = 0\,, \tag{27}$$

$$\frac{M_{n-1}}{\Theta} - \left(\frac{1}{\Theta} + \frac{1}{\Theta_{n+1}} - \frac{\omega^2}{c_n}\right) M_n + \frac{M_{n+1}}{\Theta_{n+1}} = 0\,. \tag{28}$$

Die Randbedingungen lauten

$$M_{-1} = 0\,, \qquad M_{n+1} = 0\,.$$

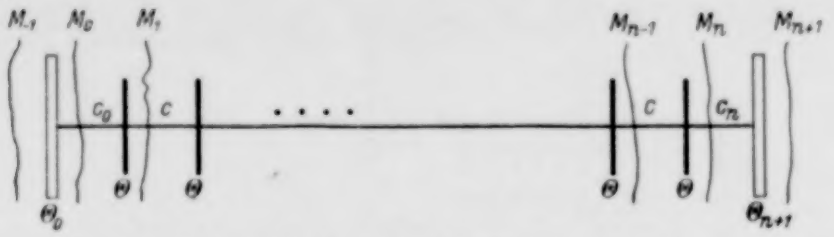


Abb. 4. Homogene Maschine mit je einer Zusatzdrehmasse rechts und links.

Damit und mit M_0, M_1, M_{n-1} und M_n aus (7) sowie ω^2 aus (8) erhält man

$$\sin x \cos\gamma + \left[\cos x - \left(1 + \frac{\Theta}{\Theta_0} - 4\,\frac{c}{c_0}\sin^2\frac{x}{2}\right)\right]\sin\gamma = 0\,, \tag{29}$$

$$\left[\sin(n-1)\,x - \left(1 + \frac{\Theta}{\Theta_{n+1}} - 4\,\frac{c}{c_n}\sin^2\frac{x}{2}\right)\sin n\,x\right]\cos\gamma$$
$$+ \left[\cos(n-1)\,x - \left(1 + \frac{\Theta}{\Theta_{n+1}} - 4\,\frac{c}{c_n}\sin^2\frac{x}{2}\right)\cos n\,x\right]\sin\gamma = 0\,. \tag{30}$$

Eliminiert man daraus γ (was gleichbedeutend ist mit dem Verschwinden der Koeffizientendeterminante vorstehender linearer homogener Gleichungen für $\sin\gamma$ und $\cos\gamma$), so gelangt man zu folgender Bestimmungsgleichung für die Eigenwerte:

$$\left(1 + \frac{\Theta}{\Theta_0} - 4\,\frac{c}{c_0}\sin^2\frac{x}{2}\right)\left(1 + \frac{\Theta}{\Theta_{n+1}} - 4\,\frac{c}{c_n}\sin^2\frac{x}{2}\right)\sin n\,x$$
$$- \left[\left(1 + \frac{\Theta}{\Theta_0} - 4\,\frac{c}{c_0}\sin^2\frac{x}{2}\right) + \left(1 + \frac{\Theta}{\Theta_{n+1}} - 4\,\frac{c}{c_n}\sin^2\frac{x}{2}\right)\right]\sin(n-1)\,x + \sin(n-2)\,x = 0\,. \tag{31}$$

Zur Untersuchung der komplexen Lösungen dieser Gleichung setzen wir wieder

$$x = \alpha + i\,\beta \qquad (\alpha, \beta \text{ reell})$$

und bekommen

$$\alpha = \pi$$

sowie

$$\left(1 + \frac{\Theta}{\Theta_0} - 4\,\frac{c}{c_0}\mathfrak{Cof}^2\frac{\beta}{2}\right)\left(1 + \frac{\Theta}{\Theta_{n+1}} - 4\,\frac{c}{c_n}\mathfrak{Cof}^2\frac{\beta}{2}\right)\mathfrak{Sin}\,n\,\beta$$
$$+ \left[\left(1 + \frac{\Theta}{\Theta_0} - 4\,\frac{c}{c_0}\mathfrak{Cof}^2\frac{\beta}{2}\right) + \left(1 + \frac{\Theta}{\Theta_{n+1}} - 4\,\frac{c}{c_n}\mathfrak{Cof}^2\frac{\beta}{2}\right)\right]\mathfrak{Sin}(n-1)\,\beta + \mathfrak{Sin}(n-2)\,\beta = 0\,. \tag{32}$$

Die Größe γ berechnet man am einfachsten aus (29); mit $x = \pi + i\,\beta$ folgt

$$\operatorname{ctg}\gamma = i\,\mathfrak{Ctg}\,i\,\gamma = i\,\frac{\mathfrak{Cof}\,\beta + \left(1 + \frac{\Theta}{\Theta_0} - 4\,\frac{c}{c_0}\mathfrak{Cof}^2\frac{\beta}{2}\right)}{\mathfrak{Sin}\,\beta}\,, \tag{33}$$

also ein rein imaginärer Wert für γ.

Für die Kreisfrequenz ω gilt wieder (15); die Momente und Drehwinkel im homogenen Teil werden aus (10) und (11) mit $x = \varkappa + i\beta$ und γ aus (33) ermittelt:

$$\frac{M_k}{M_1} = (-1)^{k+1} \frac{\mathfrak{Sin}\,(k-1)\beta + \left(1 + \frac{\Theta}{\Theta_0} - 4\,\frac{c}{c_0}\,\mathfrak{Cof}^2\,\frac{\beta}{2}\right)\mathfrak{Sin}\,k\beta}{\left(1 + \frac{\Theta}{\Theta_0} - 4\,\frac{c}{c_0}\,\mathfrak{Cof}^2\,\frac{\beta}{2}\right)\mathfrak{Sin}\,\beta} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots n)\,, \quad (34)$$

$$\frac{\varphi_k}{\varphi_1} = (-1)^{k+1} \frac{\mathfrak{Sin}\left(k - \frac{3}{2}\right)\beta + \left(1 + \frac{\Theta}{\Theta_0} - 4\,\frac{c}{c_0}\,\mathfrak{Cof}^2\,\frac{\beta}{2}\right)\mathfrak{Sin}\left(k - \frac{1}{2}\right)\beta}{\left(\frac{\Theta}{\Theta_0} - 4\,\frac{c}{c_0}\,\mathfrak{Cof}^2\,\frac{\beta}{2}\right)\mathfrak{Sin}\,\frac{\beta}{2}} \qquad (k = 1, 2, \ldots n)\,. \quad (35)$$

Für die Drehwinkel φ_0 und φ_{n+1} der Zusatzdrehmassen folgt aus (6) bei Beachtung von 15)

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_1} = \frac{1}{1 - 4\,\frac{c}{c_0}\,\frac{\Theta_0}{\Theta}\,\mathfrak{Cof}^2\,\frac{\beta}{2}}\,, \quad (35')$$

und

$$\frac{\varphi_{n+1}}{\varphi_1} = \frac{\varphi_n}{\varphi_1}\,\frac{1}{1 - 4\,\frac{c}{c_n}\,\frac{\Theta_{n+1}}{\Theta}\,\mathfrak{Cof}^2\,\frac{\beta}{2}}\,. \quad (35'')$$

Gleichung (32) liefert höchstens zwei reelle Werte für β.

Die Diskussion dieser Gleichung sei auf den vereinfachten Fall gleicher Zusatzmassen $\Theta_{n+1} = \Theta_0$ und gleicher Zusatzfederkonstanten $c_n = c_0$ beschränkt. Dafür gilt

$$\left(1 + \frac{\Theta}{\Theta_0} - 4\,\frac{c}{c_0}\,\mathfrak{Cof}^2\,\frac{\beta}{2}\right)^2 \mathfrak{Sin}\,n\beta + 2\left(1 + \frac{\Theta}{\Theta_0} - 4\,\frac{c}{c_0}\,\mathfrak{Cof}^2\,\frac{\beta}{2}\right)\mathfrak{Sin}\,(n-1)\beta + \mathfrak{Sin}\,(n-2)\beta = 0\,.$$

Löst man diese Gleichung nach $\left(1 + \frac{\Theta}{\Theta_0} - 4\,\frac{c}{c_0}\,\mathfrak{Cof}^2\,\frac{\beta}{2}\right)$ auf, so erhält man nach kurzer Umformung die übersichtlichere Form

$$\underbrace{\mathfrak{Cof}^2\,\frac{\beta}{2}}_{L} = \underbrace{\frac{1}{4}\,\frac{c_0}{c}\cdot\left(1 + \frac{\Theta}{\Theta_0} + \frac{\mathfrak{Sin}\,(n-1)\beta}{\mathfrak{Sin}\,n\beta} \pm \frac{\mathfrak{Sin}\,\beta}{\mathfrak{Sin}\,n\beta}\right)}_{R}. \quad (36)$$

Die Untersuchung der durch jede Gleichungsseite gegebenen Funktionen $L = L(\beta)$ und $R = R(\beta)$ zeigt:

1. Ist die Bedingung

$$4\,\frac{c}{c_0} - \frac{\Theta}{\Theta_0} \leqq 2 - \frac{2}{n} \quad (37)$$

erfüllt, so liefert (31) $N-3$ Eigenwerte und (32) die restlichen beiden (höchsten) Eigenwerte[1].

2. Gilt die Bedingung

$$2 - \frac{2}{n} < 4\,\frac{c}{c_0} - \frac{\Theta}{\Theta_0} \leqq 2\,, \quad (38)$$

so erhält man aus (31) $N-2$ Eigenwerte und aus (32) den restlichen (höchsten) Eigenwert.

3. Ist

$$4\,\frac{c}{c_0} - \frac{\Theta}{\Theta_0} > 2\,, \quad (39)$$

so liefert (31) sämtliche Eigenwerte; (32) hat in diesem Fall keine reelle Lösung für β.

6. Beispiele. Wir legen den drei Beispielen eine Sechszylindermaschine ($n = 6$) zugrunde.

Im Fall einer Zusatzmasse (Beispiel 1) wählen wir $c/c_6 = 1/3$ und $\Theta/\Theta_7 = 1/10$. Durch Einsetzen in (19) sieht man sofort, daß diese Bedingung erfüllt ist. Der höchste Eigenwert muß infolgedessen aus (14) berechnet werden (vgl. hierzu die graphische Darstellung Abb. 5); Gleichung (13) liefert nämlich nur fünf Frequenzen.

[1] Sinngemäß gilt auch hier Fußnote 1 von Seite 253.

Wir erhalten

$$|\beta| = 0{,}791$$

und damit aus (15), (16), (17) und (17′)

$$\omega_6 = 2{,}158 \sqrt{\frac{c}{\Theta}} ,$$

$$\frac{M_k}{M_1} = (-1)^{k+1} \frac{\mathfrak{Sin}\, 0{,}791\, k}{0{,}876} , \qquad \frac{\varphi_k}{\varphi_1} = (-1)^{k+1} \frac{\mathfrak{Sin}\, [0{,}791\,(k-0{,}5)]}{0{,}406} \qquad (k = 1, 2 \ldots 6) ,$$

$$\frac{\varphi_7}{\varphi_1} = 4{,}429 .$$

Für die fünf ersten Eigenwerte ist (13) maßgebend. Auf eine diesbezügliche zahlenmäßige Auswertung wird verzichtet, da diese wie üblich geschieht.

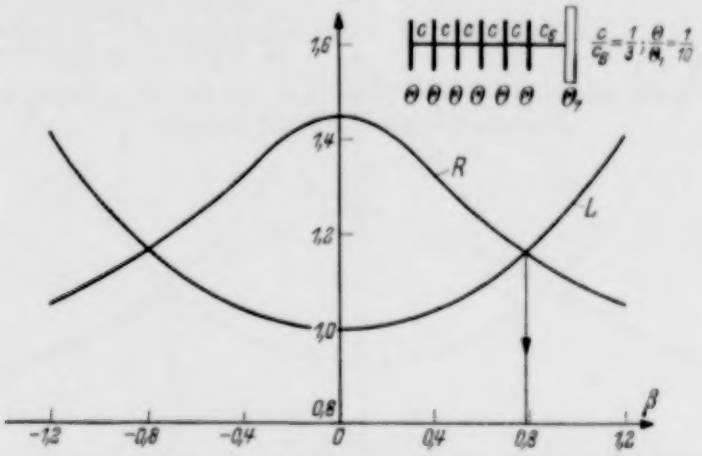


Abb. 5. Ermittlung des höchsten Eigenwertes für das Beispiel 1.

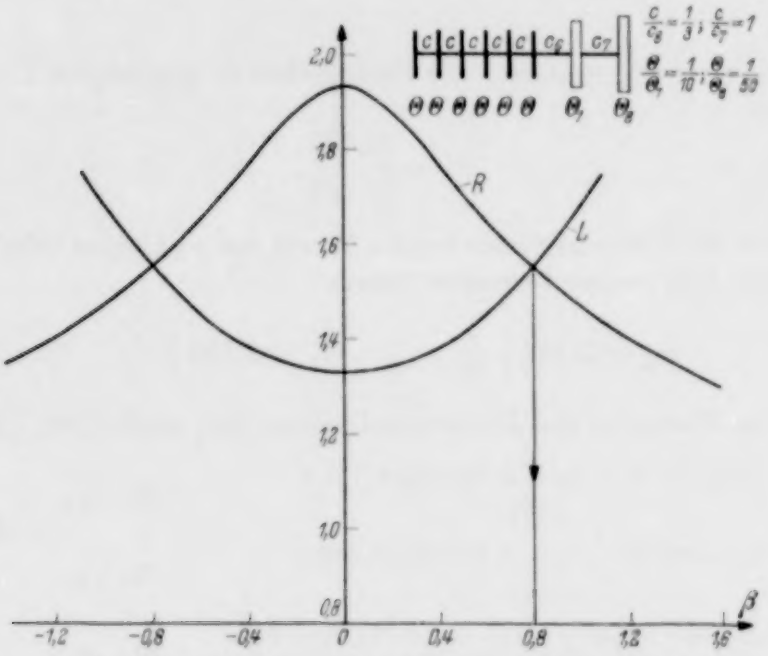


Abb. 6. Ermittlung des höchsten Eigenwertes für das Beispiel 2.

Im Fall von zwei Zusatzmassen auf einer Seite (Beispiel 2) legen wir die Daten $c/c_6 = 1/3$, $c/c_7 = 1$, $\Theta/\Theta_7 = 1/10$, $\Theta/\Theta_8 = 1/50$ zugrunde, welche die Bedingung (26) erfüllen, (25) dagegen nicht. Nach dem unter Ziff. 4 Gesagten liefert (22) nur die ersten sechs Eigenwerte, während der siebente nach (23) oder (24) ermittelt werden muß. Abb. 6 zeigt die graphische Bestimmung von β entsprechend (24). Es ergibt sich

$$|\beta| = 0{,}793$$

und damit für die höchste Eigenfrequenz und die dazu gehörigen Momente und Drehwinkel

$$\omega_7 = 2{,}159\sqrt{\frac{c}{\Theta}}\,,$$

$$\frac{M_k}{M_1} = (-1)^{k+1}\frac{\mathfrak{Sin}\,0{,}793\,k}{0{,}879}\,, \qquad \frac{\varphi_k}{\varphi_1} = (-1)^{k+1}\frac{\mathfrak{Sin}\,0{,}793\,(k-0{,}5)}{0{,}407} \qquad (k = 1, 2 \ldots 6)\,.$$

$$\frac{M_7}{M_1} = 1{,}461\,, \qquad \frac{\varphi_7}{\varphi_1} = 67{,}8\,, \qquad \frac{\varphi_8}{\varphi_1} = -0{,}296\,.$$

Im Falle von je einer Zusatzmasse rechts und links (Beispiel 3) wählen wir $c/c_0 = c/c_6 = 1/3$, $\Theta/\Theta_0 = \Theta/\Theta_7 = 1/10$. Mit diesen Daten ist die Bedingung (37) erfüllt. Nach Ziff. 5 liefert dann (31) die ersten fünf Eigenwerte, während die restlichen beiden (auf die wir uns hier beschränken) nach (32) bestimmt werden müssen. Die entsprechende graphische Darstellung gibt Abb. 7. Man entnimmt daraus

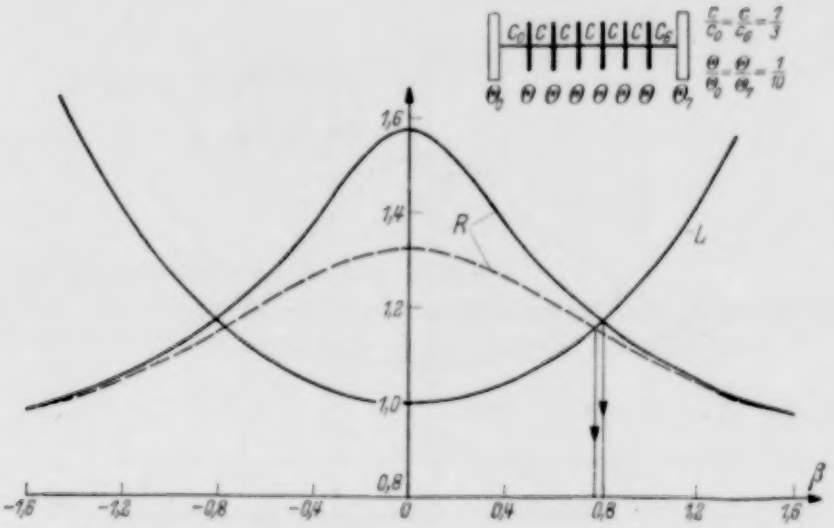


Abb. 7. Ermittlung der beiden höchsten Eigenwerte für das Beispiel 3.

$$|\beta| = \begin{cases} 0{,}775\,, \\ 0{,}805 \end{cases}$$

und erkennt ferner, daß die Differenz dieser beiden Werte um so kleiner wird, je größer diese sind. Für die entsprechenden Frequenzen bekommt man[1]

$$\omega_6 = 2{,}152\sqrt{\frac{c}{\Theta}}\,, \qquad \omega_7 = 2{,}164\sqrt{\frac{c}{\Theta}}\,.$$

Die Gleichungen für die Momente und Drehwinkel lauten hier nach (34), (35), (35′) und (35″)

$$\frac{M_k}{M_1} = (-1)^{k+1}\begin{cases} \dfrac{\mathfrak{Sin}\,0{,}775\,(k-1) - 0{,}444\,\mathfrak{Sin}\,0{,}775\,k}{0{,}379} & \text{für } \omega_6\,, \\ \dfrac{\mathfrak{Sin}\,0{,}805\,(k-1) - 0{,}461\,\mathfrak{Sin}\,0{,}805\,k}{0{,}413} & \text{für } \omega_7\,, \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2 \ldots 6)\,,$$

$$\frac{\varphi_k}{\varphi_1} = (-1)^{k}\begin{cases} \dfrac{\mathfrak{Sin}\,0{,}775\,(k-1{,}5) - 0{,}444\,\mathfrak{Sin}\,0{,}775\,(k-0{,}5)}{0{,}574} & \text{für } \omega_6\,, \\ \dfrac{\mathfrak{Sin}\,0{,}805\,(k-1{,}5) - 0{,}461\,\mathfrak{Sin}\,0{,}805\,(k-0{,}5)}{0{,}604} & \text{für } \omega_7\,. \end{cases} \qquad (k = 1, 2 \ldots 6)\,.$$

$$\frac{\varphi_0}{\varphi_1} = \begin{cases} -0{,}0693 & \text{für } \omega_6\,, \\ -0{,}0685 & \text{für } \omega_7\,, \end{cases} \qquad \frac{\varphi_7}{\varphi_1} = \begin{cases} -0{,}0693 & \text{für } \omega_6\,, \\ 0{,}0685 & \text{für } \omega_7\,. \end{cases}$$

[1] Das von *Th. Pöschl* und *L. Collatz* a. a. O. für eine Sechszylindermaschine mit zwei gleichen Zusatzmassen und gleichen Zusatzfederkonstanten angegebene Nomogramm führt mit unseren Zahlendaten zu $\omega_6 = 1{,}90\sqrt{c/\Theta}$, $\omega_7 = 1{,}96\sqrt{c/\Theta}$. Anscheinend sind in diesem Nomogramm die Parameter γ und γ' verwechselt, denn nach Vertauschung der beiden erhält man Übereinstimmung mit unseren Ergebnissen.

7. Zusammenfassung. Unter gewissen Bedingungen liefern die für die Berechnung der Eigenwerte einer homogenen Maschine mit Zusatzdrehmassen maßgebenden transzendenten Gleichungen bei alleiniger Berücksichtigung der reellen Lösungen zu wenig Eigenfrequenzen. Die fehlenden Frequenzen — es handelt sich hierbei stets um die höchsten — erhält man aus den komplexen Lösungen. Es werden, unter Beschränkung auf eine oder zwei Zusatzmassen, die Bedingungen untersucht, bei denen komplexe Eigenwerte auftreten, und die in diesen Fällen geltenden Gleichungen für die Eigenfrequenzen, Momente und Drehwinkel abgeleitet. Neben dem Verhältnis der Trägheitsmomente ist auch dasjenige der Federkonstanten für das Auftreten komplexer Lösungen von Bedeutung, so daß solche, wie man aus den zuständigen Bedingungsgleichungen ersieht, auch bei sehr großen Zusatzmassen vorkommen können. Man kann übrigens zeigen, daß beim Vorhandensein von z Zusatzmassen maximal z komplexe Eigenwerte möglich sind.

Es sei hier noch vermerkt, daß sich die gewonnenen Ergebnisse analog auf homogene Schwingungsketten mit Zusatzmassen an den Enden übertragen lassen.

(Eingegangen am 7. Oktober 1959.)

Anschrift der Verfasser: Dr.-Ing. *H. Bufler* und Dipl.-Ing. *F. Kießling*, München, Techn. Hochschule, Institut für Technische Mechanik.

On the steady thermoelastic problems with elastic characteristics depending on temperature

By M. M. Stanišić and R. M. McKinley

1. Object of Investigation. A comparison is in order between the solution of the steady-state, axially symmetric stress field presented by *Trostel*[1] (hereafter referred to as an exact solution A) and the approximate solution presented by *Stanišić* and *McKinley*[2] (hereafter referred to as solution B). *Trostel* determines a solution in series for the Navier equations and employs a two-term truncation for actual calculations. In solution B, *Stanišić* and *McKinley* replace the compatibility equation, in terms of a stress function, by an approximation and solve this by quadratures. The object of this paper is to show that the technique used in solution B is equivalent to a two-term truncated solution in series of the compatibility equation. The similarity between solutions A and B will elucidated in this study.

2. Analogy between two Solutions. To begin the analogy[3], consider first the case for which.

$$p_i = p_0 = 0 \qquad \text{(no external load)},$$

$$\alpha(T) = \alpha[T(r)],$$

$$E(T) = E_0 \qquad \text{(constant)}.$$

Equations (18), (19), and (20) of solution B are evaluated as

(a) $$\Phi_1(r) = \frac{E_0}{2}\,\frac{r^2 - r_i^2}{r^2 r_i^2},$$

(b) $$\Phi_2(r) = E_0 \left\{ \int_0^{T(r)} \alpha(\Theta)\, d\Theta - \left(\frac{r_i}{r}\right)^2 \int_0^{T_i} \alpha(\Theta)\, d\Theta - \frac{2}{r^2} \int_{r_i}^{r} \xi \left[\int_0^{T(\xi)} \alpha(\Theta)\, d\Theta \right] d\xi \right\},$$

(c) $$\Phi_3(r) = E_0 \left\{ \left[\frac{r_i^2 - r^2}{r^2}\right] \left[2 \int_0^{T_i} \alpha(\Theta)\, d\Theta \right] + \frac{1}{r^2} \int_{r_i}^{r} \xi \left[\int_0^{T(\xi)} \alpha(\Theta)\, d\Theta \right] d\xi \right\}.$$

The stress field is given by equations (29) and (30) of solution B

(d) $$\sigma_r = -\frac{E_0}{1-\nu}\,\frac{\Phi_3(r_0)}{E_0} \left[\frac{\Phi_3(r)}{\Phi_3(r_0)} - \frac{\Phi_1(r)}{\Phi_1(r_0)} \right],$$

(e) $$\sigma_\Theta = -\frac{E_0}{1-\nu}\,\frac{\Phi_3(r_0)}{E_0} \left[\frac{\Phi_2(r) - \Phi_3(r)}{\Phi_3(r_0)} - \frac{\dfrac{E(T)}{r^2} + \Phi_1(r)}{\Phi_1(r_0)} \right].$$

Equations (d) and (e) are identical with equations (30a) and (30b) of Trostel's solution A, and both exact solutions.

For the similar case, except $E(T)$ is to be regarded as a variable, we integrate equations (18) and (20) by parts to obtain

(a′) $$\Phi_1(r) = \frac{E(T)}{2}\,\frac{r^2 - r_i^2}{r^2 r_i^2} + 2\varepsilon \int_{r_i}^{r} \frac{\Phi(\xi)}{\xi^2}\, d\xi,$$

---

[1] *R. Trostel*, Ing.-Arch. 26 (1958) p. 416 (Dezember, 1958).
[2] *M. M. Stanišić* and *R. M. McKinley*, Ing.-Arch. 27 (1959) p. 227.
[3] *M. M. Stanišić*, Lectures in Thermoelasticity, Division of Engineering Sciences, Purdue University.

$$\text{(b')} \qquad \Phi_3(r) = \frac{E(T)}{r^2}\int_{r_i}^{r}\xi\left[\int_{0}^{T(\xi)}\alpha(\Theta)\,d\Theta\right]d\xi - 2\,\varepsilon\int_{r_i}^{r}\frac{\Phi(\xi)}{\xi^2}\,d\xi + 2\,E(T)\,\frac{r_i^2 - r^2}{r^2}\int_{0}^{T_i}\alpha(\Theta)\,d\Theta$$

$$- \varepsilon\int_{r_i}^{r}\Phi(\xi)\,\frac{dT}{d\xi}\left\{\int_{r_i}^{\xi}\frac{1}{\eta}\left[\int_{0}^{T(\eta)}\alpha(\Theta)\,d\Theta\right]d\eta\right\}d\xi$$

$$+ 2\,\varepsilon\int_{r_i}^{r}\Phi(\xi)\,\frac{dT}{d\xi}\left\{\int_{r_i}^{\xi}\frac{1}{\eta^3}\left(\int_{r_i}^{\eta}\zeta\left[\int_{0}^{T(\zeta)}\alpha(\Theta)\,d\Theta\right]d\zeta\right)d\eta\right\}d\xi$$

where*

$$\frac{dE}{dT} = \varepsilon\,\Phi(T)\,.$$

Collect terms with and without ε-coefficients, and, also, in equations (d) and (e) of this paper replace E_0 by the variable $E(T)$, denoting the results by $\sigma_{r,0}$ and $\sigma_{\Theta,0}$. Then the stress field of solution B can be written in the form

$$\text{(f)} \qquad \sigma_r = \sigma_{r,0} + \varepsilon\,\sigma^*_{r,1}\,,$$

$$\text{(g)} \qquad \sigma_\Theta = \sigma_{\Theta,0} + \varepsilon\,\sigma^*_{\Theta,1}\,.$$

This establishes the analogy between solutions A and B. In equations (f) and (g), the $\sigma_{r,0}$ and $\sigma_{\Theta,0}$ are identical with Trostel's "Grundlösung" as given by equations (30a) and (30b) of A. However, our first corrections $\sigma^*_{r,1}$ and $\sigma^*_{\Theta,1}$ are not the same as the analogous $\overline{\sigma_{r,1}}$ and $\overline{\sigma_{\Theta,1}}$ deduced by *Trostel* in equations (35a) and (35b). For example:

$$\sigma^*_{r,1} = \overline{\sigma^*_{r,1}} - \varepsilon_r\,,$$

where

$$\varepsilon_r = E(T)\,\frac{1-2\nu}{1-\nu}\left\{\int_{r_i}^{r}\xi\left[\int_{r_i}^{\xi}\left(\frac{\Phi(\eta)}{E(\eta)}\,\frac{dT}{d\eta}\,\sigma_{r,0}\right)d\eta\right]d\xi - \varepsilon\,\frac{r^2 - r_i^2}{r_0^2 - r_i^2}\int_{r_i}^{r_0}\xi\left[\int_{r_i}^{\xi}\left(\frac{\Phi(\eta)}{E(\eta)}\,\frac{dT}{d\eta}\,\sigma_{r,0}\right)d\eta\right]d\xi\right\},$$

that is, our first corrections differ from *Trostel*'s in that they neglect the term in his equations (35a) and (35b) with coefficient $\left(\frac{1-2\nu}{1-\nu}\right)$. This term constitutes less than 30% of the total corrections.

3. Conclusion. We therefore conclude that the approximate solution B gives in a single operation, the "Grundlösung" and about 70% of the first correction term of the exact solution A.

(Eingegangen am 20. Oktober 1959.)

Anschrift der Verfasser: Prof. Dr.-Ing., Dr. Phil. *Milomir M. Stanišić*, Division of Engineering Sciences, Purdue University, West Lafayette, Indiana;

Graduate Student *R. M. McKinley*, Chemical Engineering, Purdue University, West Lafayette, Indiana.

* The ε is a constant. This notation is in agreement with that employed by *Trostel*.

Knickung verwundener Stäbe unter Druck einer konservativen, kontinuierlich und gleichmäßig verteilten Belastung

Von **H. Leipholz**

1. Problemstellung. Als Voraussetzungen sollen gelten:

1. Die Stäbe seien gerade, elastisch, lang und dünn, und sie mögen unter der Belastung nur kleine Verformungen erleiden. Dann gelten für Gleichgewichtsbetrachtungen am herausgeschnittenen Stabelement die Gleichungen von *Kirchhoff* und *Clebsch*, und man kann über die Verknüpfung der resultierenden Spannungsmomente in den Stabquerschnitten mit der Krümmung und Verdrillung des Stabes einfache Aussagen machen, wie sie im folgenden benutzt werden sollen[1].

2. Die Stäbe mögen für einen Querschnitt zwei verschiedene Hauptträgheitsmomente bezüglich des Querschnitts-Schwerpunktes haben, die aber über die Länge des Stabes konstant seien.

Ferner sei der Stab verwunden, das heißt, die Schwerpunkts-Hauptachsen seien schon im spannungslosen Zustand um einen konstanten Winkel τ je Längeneinheit des Stabes gegeneinander verdreht.

3. Die Belastung der Stäbe sei durch kontinuierlich über ihre Achse verteilte Druckkräfte q gegeben. Dabei möge die Wirkungslinie von q richtungstreu bleiben, das heißt, stets die Richtung der unverformten, geraden Stabachse beibehalten. Dann ist die Belastung konservativ, und es kann zur Ermittlung der Eigenwerte des Problems das statische Stabilitätskriterium und damit die Gleichgewichtsmethode benutzt werden[2].

Diese Arbeit befaßt sich mit der Weiterführung eines Problems, das von *E. Hui*[3] für den verwundenen Knickstab mit Einzellasten an den Stabenden gelöst wurde, und es steht außerdem in nahem Zusammenhang mit Arbeiten von *H. Ziegler*[4] über die gedrückte und tordierte Welle.

Mit Rücksicht auf die Lagerung der Stabenden werden die fünf Knickfälle von Abb. 1 unterschieden.

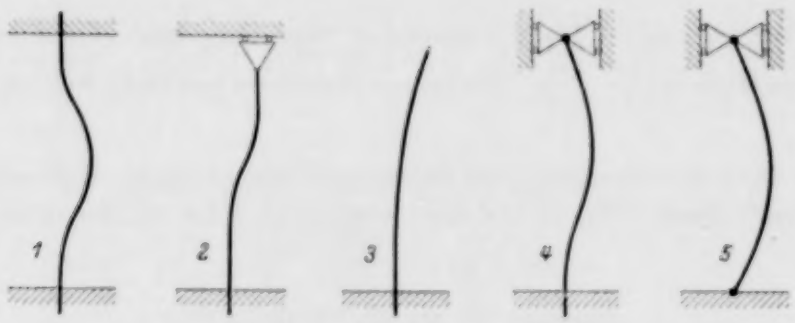


Abb. 1.

2. Aufstellung der Differentialgleichungen. Unter Anwendung der Gleichgewichtsmethode erhält man durch Betrachtung eines herausgeschnittenen Stabelementes (Abb. 2) die Vektorgleichungen

$$\frac{d\mathfrak{R}}{ds} = -\mathfrak{k}\,, \qquad \frac{d\mathfrak{M}}{ds} + \mathfrak{t} \times \mathfrak{R} = 0\,, \tag{1}$$

wobei $\mathfrak{R}$ den Kraftvektor, $\mathfrak{M}$ den Momentvektor, $\mathfrak{k}$ den Vektor der Belastung, $\mathfrak{t}$ den Einheitsvektor in der Tangentenrichtung der Achse und s als unabhängige Variable die laufende Länge der Stabachse bedeuten.

---

[1] *A. E. H. Love*, — *A. Timpe*, Lehrbuch der Elastizität, S. 446, 447. Leipzig und Berlin 1907.
[2] *H. Ziegler*, On the Concept of Elastic Stability, aus: Advances in Applied Mechanics, IV, New York 1956.
[3] *E. Hui*, Österr. Ing.-Arch. 9 (1955) S. 288.
[4] *H. Ziegler*, Z. angew. Math. Physik 2 (1951) S. 265 und 3 (1952) S. 96.

Diese Vektorgleichungen seien auf das Hauptachsensystem des Stabes bezogen (Abb. 3). Dieses System ist beweglich. Sein Ursprung fällt jeweils in den Schwerpunkt des gerade betrachteten Stabquerschnittes, gleitet also entlang der Stabachse. Die ξ- und η-Achsen decken sich mit den Schwerpunkts-Hauptachsen des jeweiligen Stabquerschnittes. Die ζ-Achse fällt mit der Tangente an die elastische Linie im betreffenden Querschnitts-Schwerpunkt zusammen. Die Achsen sind so orientiert, daß man ein Rechtssystem (ξ, η, ζ) hat und die ζ-Achse im Sinne wachsender Länge der Stabachse zeigt.

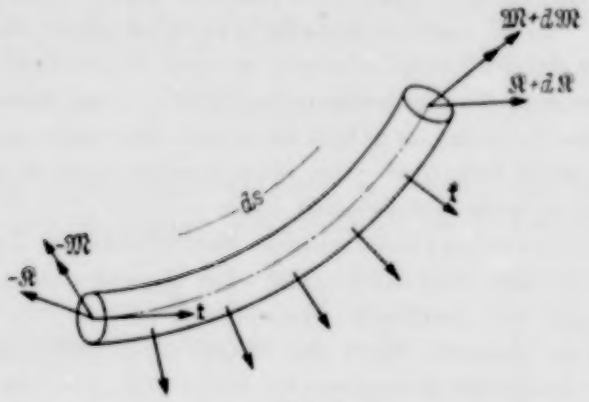


Abb. 2.

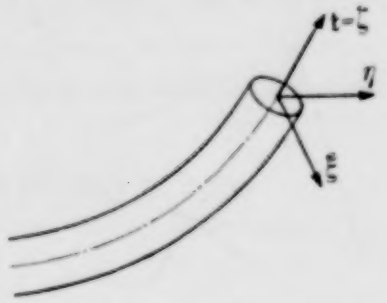


Abb. 3.

Da der Stab verwunden ist, führt das Hauptachsensystem auch noch eine Drehung aus, selbst wenn man von der geringen zusätzlichen Verwindung infolge elastischer Deformation absieht. Der Vektor $\mathfrak{w}$ dieser Drehung je Längeneinheit der Stabachse ist mit der elastischen Deformation $\mathfrak{u}$ des Stabes verknüpft. Diese habe bezüglich des Hauptachsensystems die Komponenten

$$\mathfrak{u} = \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \tau_\zeta \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Dabei sind ω_ξ und ω_η die Krümmung und τ_ζ die Verwindung des deformierten Stabes. Unter der getroffenen Voraussetzung kleiner Verformungen soll insbesondere $\tau_\zeta \equiv 0$ gesetzt und die genannte Verknüpfung gegeben werden durch

$$\mathfrak{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau \end{pmatrix} + \mathfrak{u} \approx \begin{pmatrix} \omega_\xi \\ \omega_\eta \\ \tau \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Schreibt man das Gleichungssystem (1) vom Standpunkt eines mit dem bewegten Hauptachsensystem fest verbundenen Beobachters, so erhält man

$$\frac{d\mathfrak{K}}{ds} + \mathfrak{w} \times \mathfrak{K} = -\mathfrak{k}, \qquad \frac{d\mathfrak{M}}{ds} + \mathfrak{w} \times \mathfrak{M} + \mathfrak{t} \times \mathfrak{K} = 0. \tag{4}$$

In Komponenten bezüglich des Hauptachsensystems geschrieben gibt (4) die Gleichungen von *Kirchhoff* und *Clebsch*, hier allerdings in etwas erweiterter Form wegen des Auftretens der konstanten, gleichmäßig verteilten Belastung $\mathfrak{k}$:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dQ_\xi}{ds} + N_\zeta \omega_\eta - Q_\eta \tau + p_\xi = 0, \qquad & \frac{dM_\xi}{ds} + T_\zeta \omega_\eta - M_\eta \tau - Q_\eta = 0, \\ \frac{dQ_\eta}{ds} + Q_\xi \tau - N_\zeta \omega_\xi + p_\eta = 0, \qquad & \frac{dM_\eta}{ds} + M_\xi \tau - T_\zeta \omega_\xi + Q_\xi = 0, \\ \frac{dN_\zeta}{ds} + Q_\eta \omega_\xi - Q_\xi \omega_\eta + q_\zeta = 0, \qquad & \frac{dT_\zeta}{ds} + M_\eta \omega_\xi - M_\xi \omega_\eta = 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Dabei sind folgende Bezeichnungen für die Komponenten gewählt:

$$\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} Q_\xi \\ Q_\eta \\ N_\zeta \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{M} = \begin{pmatrix} M_\xi \\ M_\eta \\ T_\zeta \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathfrak{k} = \begin{pmatrix} p_\xi \\ p_\eta \\ q_\zeta \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Sind a und b die konstanten Biegesteifigkeiten, sowie c die konstante Torsionssteifigkeit des Stabes, so ist nach Voraussetzung 1 von Ziff. 1 der Zusammenhang zwischen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{u}$

$$M_\xi = a\,\omega_\xi\,, \qquad M_\eta = b\,\omega_\eta\,, \qquad T_\zeta = c\,\tau_\zeta \equiv 0\,. \tag{7}$$

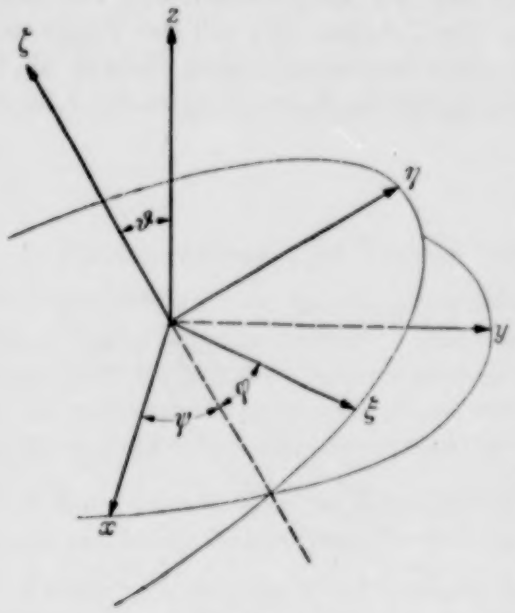


Abb. 4

Die Gleichungen (5) und (7) würden unter Berücksichtigung entsprechender Randbedingungen zur Lösung des Problems genügen, wofern die Komponenten p_ξ, p_η und q_ζ der Belastung $\mathfrak{k}$ des Stabes bezüglich des Hauptachsensystems bekannt wären. Gerade das wird aber üblicherweise nicht der Fall sein, sondern es wird die Stabbelastung wohl meist mit Komponenten bezüglich eines raumfesten kartesischen Systems gegeben sein. Es ist daher noch zu zeigen, wie man Vektoren vom Hauptachsensystem auf ein raumfestes System umrechnen kann.

Abgesehen von der belanglosen, gleichförmigen Translation entlang der Stabachse mit der Geschwindigkeit 1 (wofern man die laufende Koordinate s der Stabachse jetzt als Zeit deutet) führt das Hauptachsensystem noch eine Kreiselung mit $\mathfrak{w}$ um seinen Ursprung aus, den man mit dem Ursprung des raumfesten Systems zusammenfallen lassen kann (Abb. 4). Für die Umrechnung von einem System ins andere kann man daher Beziehungen verwenden, die in der Kinematik des Kreisels geläufig sind. Unter Verwendung der *Euler*schen Winkel erhält man für die Umrechnung eines Vektors $\mathfrak{a}$ von seiner Darstellung $\mathfrak{a}^{(HAS)}$ im Hauptachsensystem zu seiner Darstellung $\mathfrak{a}^{(rf)}$ im raumfesten System die Transformationsformel

$$\mathfrak{a}^{(HAS)} = \mathfrak{A}\,\mathfrak{a}^{(rf)}\,. \tag{8}$$

Dabei ist $\mathfrak{A}$ die folgende Matrix:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \sin\psi\sin\varphi\cos\vartheta & \sin\psi\cos\varphi + \cos\psi\sin\varphi\cos\vartheta & \sin\varphi\sin\vartheta \\ -\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi\cos\vartheta & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi\cos\vartheta & \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\psi\sin\vartheta & -\cos\psi\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Ferner gelten für $\mathfrak{w}$ noch die Beziehungen

$$\left.\begin{aligned} \omega_\xi &= \cos\varphi\,\dot\vartheta + \sin\varphi\sin\vartheta\,\dot\psi\,, \\ \omega_\eta &= -\sin\varphi\,\dot\vartheta + \cos\varphi\sin\vartheta\,\dot\psi\,, \\ \tau &= \cos\vartheta\,\dot\psi + \dot\varphi\,. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Punkte sollen dabei die Ableitungen nach s bezeichnen.

Wegen der Voraussetzung 1 kleiner Verformungen kann ϑ nur ein sehr kleiner Winkel sein und man kann $\cos\vartheta \approx 1$ setzen. Dann erhält man

$$\tau \approx \dot\psi + \dot\varphi\,, \quad \text{also} \quad \psi + \varphi = \chi = \int_0^s \tau\,ds = \tau\,s \tag{11}$$

und damit statt $\mathfrak{A}$

$$\mathfrak{A}_1 = \begin{pmatrix} \cos\tau s & \sin\tau s & \sin\varphi\sin\vartheta \\ -\sin\tau s & \cos\tau s & \cos\varphi\sin\vartheta \\ \sin\psi\sin\vartheta & -\cos\psi\sin\vartheta & 1 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Führt man nun den lotrechten Einheitsvektor $\mathfrak{e}$ ein mit den Komponentendarstellungen

$$\mathfrak{e}^{(HAS)} = \begin{pmatrix} e_\xi \\ e_\eta \\ e_\zeta \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \mathfrak{e}^{(rf)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

so erhält man aus (8), wenn man noch statt $\mathfrak{A}$ das $\mathfrak{A}_1$ verwendet,

$$e_\xi = \sin\varphi\sin\vartheta\,, \qquad e_\eta = \cos\varphi\sin\vartheta\,, \qquad e_\zeta = 1\,. \tag{13}$$

Mit (13) erhält man statt $\mathfrak{A}_1$, wenn man für die dritte Zeile außerdem $\sin\vartheta \approx 0$ setzt,

$$\mathfrak{A}_2 = \begin{pmatrix} \cos\tau s & \sin\tau s & e_\xi \\ -\sin\tau s & \cos\tau s & e_\eta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Mit dieser Matrix $\mathfrak{A}_2$ soll künftig die Umrechnung von einer Darstellung eines Vektors in seine andere Darstellung gemäß

$$\mathfrak{a}^{(HAS)} = \mathfrak{A}_2\, \mathfrak{a}^{(rf)} \tag{15}$$

erfolgen.

Die Gleichungen (13) gestatten noch, zusammen mit der Voraussetzung $\cos\vartheta \approx 1$, eine Umrechnung der Gleichungen (10).

Man multipliziere die erste Gleichung (10) mit $\cos\vartheta \approx 1$, addiere und subtrahiere gleichzeitig rechts den Ausdruck $\dot\varphi \sin\varphi \sin\vartheta$; dann kommt

$$\omega_\xi = -\sin\varphi\,\dot\varphi\sin\vartheta + \cos\varphi\cos\vartheta\,\dot\vartheta + \sin\varphi\sin\vartheta\,(\cos\vartheta\,\dot\psi + \dot\varphi)\,.$$

Aus (13) hat man aber

$$e_\xi = \sin\varphi\sin\vartheta\,,$$

$$\dot e_\eta = -\sin\varphi\,\dot\varphi\sin\vartheta + \cos\varphi\cos\vartheta\,\dot\vartheta$$

und aus (10) noch

$$\tau = \cos\vartheta\,\dot\psi + \dot\varphi\,.$$

Also wird

$$\left.\begin{aligned} \omega_\xi &= \dot e_\eta + \tau\, e_\xi \\ \omega_\eta &= -\dot e_\xi + \tau\, e_\eta\,. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

und entsprechend

Die weitere Rechnung erfolgt unter Verwendung von (5), (7), (15) und (16).

In einem raumfesten, kartesischen System (x, y, z) habe $\mathfrak{R}$ die Komponenten

$$\mathfrak{R} = \begin{pmatrix} Q_x \\ Q_y \\ N_z \end{pmatrix}$$

und $\mathfrak{k}$, wie vorausgesetzt, die Komponenten

$$\mathfrak{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ q \end{pmatrix}.$$

Den ersten drei Gleichungen von (5) entspricht im raumfesten System die Vektorgleichung

$$\frac{d\mathfrak{R}}{ds} = -\mathfrak{k}$$

oder in Komponenten

$$\frac{dQ_x}{ds} = 0\,, \qquad \frac{dQ_y}{ds} = 0\,, \qquad \frac{dN_z}{ds} = -q\,. \tag{17}$$

Das System (17) läßt sich sofort integrieren. Seine Lösung lautet

$$\mathfrak{R}^{(rf)} = \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \\ -\int_s^l q\, ds \end{pmatrix}, \tag{18}$$

wobei A^* und B^* Integrationskonstante sind.

Man hat damit eine Darstellung von $\mathfrak{R}$ im raumfesten System. Die Darstellung von $\mathfrak{R}$ im Hauptachsensystem erhält man daraus gemäß (15) zu

$$\mathfrak{R}^{(HAS)} = \begin{pmatrix} Q_\xi \\ Q_\eta \\ N_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\tau s & \sin\tau s & e_\xi \\ -\sin\tau s & \cos\tau s & e_\eta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^* \\ B^* \\ -\int\limits_s^l q\, ds \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{pmatrix} Q_\xi \\ Q_\eta \\ N_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^* \cos\tau s + B^* \sin\tau s - e_\xi\, q(l-s) \\ -A^* \sin\tau s + B^* \cos\tau s - e_\eta\, q(l-s) \\ -q(l-s) \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Jetzt werden die drei letzten Gleichungen von (5) behandelt. Zuerst wird (7) eingeführt und gibt

$$a\frac{d\omega_\xi}{ds} - b\,\tau\,\omega_\eta - Q_\eta = 0\,,$$

$$b\frac{d\omega_\eta}{ds} + a\,\tau\,\omega_\xi + Q_\xi = 0\,,$$

$$b\,\omega_\eta\,\omega_\xi - a\,\omega_\eta\,\omega_\xi = 0\,.$$

Wegen der Voraussetzung kleiner Verformungen sind ω_ξ, ω_η kleine Größen, und das Produkt $\omega_\xi\,\omega_\eta$ kann daher als Größe, die von höherer Ordnung klein ist, vernachlässigt werden. Es verbleibt somit ein System von nur zwei Gleichungen, in das jetzt (19) eingeführt wird. Das gibt

$$a\frac{d\omega_\xi}{ds} - b\,\tau\,\omega_\eta + A^* \sin\tau s - B^* \cos\tau s + e_\eta\, q(l-s) = 0\,,$$

$$b\frac{d\omega_\eta}{ds} + a\,\tau\,\omega_\xi + A^* \cos\tau s + B^* \sin\tau s - e_\xi\, q(l-s) = 0\,.$$

Verwendet man auch noch (16) und ordnet um, so hat man

$$\left.\begin{aligned} a\,\ddot{e}_\eta + (a+b)\,\tau\,\dot{e}_\xi + [q(l-s) - b\,\tau^2]\,e_\eta &= -A^* \sin\tau s + B^* \cos\tau s\,, \\ b\,\ddot{e}_\xi - (a+b)\,\tau\,\dot{e}_\eta + [q(l-s) - a\,\tau^2]\,e_\xi &= A^* \cos\tau s + B^* \sin\tau s\,. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Das vorgelegte Problem ist damit auf die beiden Differentialgleichungen (20) zurückgeführt.

3. Die Randbedingungen. Die Randbedingungen des Problems ergeben sich aus der Lagerung der Stabenden. Zur Aufstellung der Randbedingungen sind daher die Knickfälle gemäß Abb. 1 zu betrachten. Dort kommen folgende Lagerfälle vor:

a) Die Stabenden sind frei verschieblich und damit querkraftfrei.
b) Die Stabenden sind gelenkig gelagert und damit frei von Biegemomenten.
c) Die Stabenden sind fest eingespannt.
d) Die Stabenden sind unverschieblich.

Aus a) folgt

$$Q_x = A^* = 0\,, \quad Q_y = B^* = 0\,, \tag{21}$$

so daß die Gleichungen (20) homogen werden.

Aus b) folgt für $s = 0$ oder $s = l$

$$\left.\begin{aligned} M_\xi = a\,\omega_\xi = 0\,, &\quad \text{was nach (16) gibt} \quad \dot{e}_\eta + \tau\, e_\xi = 0\,, \\ M_\eta = b\,\omega_\eta = 0\,, &\quad \text{was nach (16) gibt} \quad -\dot{e}_\xi + \tau\, e_\eta = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Aus c) folgt: an der Einspannung fällt der Tangentenvektor der Stabachse $\mathfrak{t}$ mit dem lotrechten Einheitsvektor $\mathfrak{e}$ zusammen. Im Hauptachsensystem hat $\mathfrak{t}$ die Komponentendarstellung

$$\mathfrak{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

womit sich, weil $\mathfrak{e} = \mathfrak{t}$ gelten soll, für das eingespannte Stabende im Hauptachsensystem ergibt

$$\mathfrak{e} = \begin{pmatrix} e_\xi \\ e_\eta \\ e_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Randbedingung heißt also in diesem Fall für $s = 0$ oder $s = l$

$$e_\xi = 0\,, \qquad e_\eta = 0\,. \tag{23}$$

Aus d) folgt: der vom Stabanfang zum festgehaltenen Stabende gezogene Ortsvektor muß die Horizontalprojektion

$$\mathfrak{x}_p = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

haben. Nun ist aber

$$\mathfrak{x}_p(s) = \int_0^s \mathfrak{t}_p \, ds\,,$$

wobei $\mathfrak{t}_p$ ein Vektor mit den Komponenten $\dot{x}$ und $\dot{y}$ bezüglich des raumfesten Systems ist.

Im Hauptachsensystem hat $\mathfrak{t}_p$ die Komponenten $-e_\xi$ und $-e_\eta$.

Mittels der transponierten Matrix $\mathfrak{A}_2'$ (14) erhält man

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ 0 \end{pmatrix} = \mathfrak{A}_2' \begin{pmatrix} -e_\xi \\ -e_\eta \\ 0 \end{pmatrix},$$

also

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -(e_\xi \cos \tau s - e_\eta \sin \tau s)\,, \\ \dot{y} &= -(e_\xi \sin \tau s + e_\eta \cos \tau s)\,, \end{aligned}$$

und damit lautet die Randbedingung

$$\mathfrak{x}_p(l) = 0\,, \quad \text{also} \quad \int_0^l \mathfrak{t}_p \, ds = \int_0^l \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} ds = \left\{ \begin{aligned} &\int_0^l (e_\xi \cos \tau s - e_\eta \sin \tau s)\, ds = 0\,, \\ &\int_0^l (e_\xi \sin \tau s + e_\eta \cos \tau s)\, ds = 0\,. \end{aligned} \right\} \tag{24}$$

4. Der mathematische Inhalt des Problems. Der mathematische Inhalt des Problems besteht darin, das im allgemeinen inhomogene System von zwei linearen Differentialgleichungen mit nicht konstanten Koeffizienten, das durch (20) dargestellt wird, unter Beachtung der Randbedingungen (22) bis (24) aufzulösen. Da für jedes Stabende, also für $s = 0$ und $s = l$ Randbedingungen vorgeschrieben sind, wird eine Lösung von (20) unter gleichzeitiger Erfüllung aller Randbedingungen nur existieren, wenn von den Parametern der Differentialgleichungen gewisse Werte angenommen werden; das heißt, es liegt hier ein Eigenwertproblem vor.

In der Regel werden wohl die Parameter a, b, c und τ vorgeschrieben sein. Der für die Lösung erforderliche Eigenwert wird daher als noch verfügbare Größen l und q enthalten. Man kann also aus dem errechneten Eigenwert bei vorgeschriebener Stablänge auf die Knicklast q oder bei vorgeschriebener Belastung q auf die Knicklänge l des Stabes schließen.

5. Die Lösung der homogenen Differentialgleichungen. Erste Voraussetzung für die Lösung des eigentlichen Eigenwertproblems ist zunächst die Kenntnis der allgemeinen Lösung des zu (20) gehörenden homogenen Systems. Dieses lautet

$$\left.\begin{aligned} a\,\ddot{e}_\eta + (a+b)\,\tau\,\dot{e}_\xi + [q(l-s) - b\,\tau^2]\,e_\eta = 0\,, \\ b\,\ddot{e}_\xi - (a+b)\,\tau\,\dot{e}_\eta + [q(l-s) - a\,\tau^2]\,e_\xi = 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Durch Einführung einiger Abkürzungen und Variablentransformationen kann man die Gleichungen (25) so umformen, daß man den allgemeinen Typus, zu dem sie gehören, besser erkennt. Es sind dies die Abkürzungen

$$\lambda = \frac{q\,l^3}{a}\,, \qquad T = \tau\,l\,, \qquad \varkappa = \frac{b}{a} \tag{26}$$

und die Transformationen

$$\left.\begin{aligned} x &= \varkappa^{-1}\,\hat{\lambda}^{1/3}\left(1-\frac{s}{l}\right)-\varkappa^{-1}\,\hat{\lambda}^{-2/3}\,T^2\,,\\ e_\xi(s) &\to \varkappa^{-1/2}\,e_1(x)\,,\\ e_\eta(s) &\to e_2(x)\,. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Damit erhält man statt (25)

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{e}_2-(\varkappa+1)\,\varkappa^{1/2}\,T\,\hat{\lambda}^{-1/3}\,\dot{e}_1+[x+T^2\,\hat{\lambda}^{-2/3}\,(\varkappa^{-1}-1)]\,\varkappa^3\,e_2=0\,,\\ &\ddot{e}_1+(\varkappa+1)\,\varkappa^{1/2}\,T\,\hat{\lambda}^{-1/3}\,\dot{e}_2+\varkappa^2\,x\,e_1=0\,, \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

wobei jetzt und im folgenden Punkte Ableitungen nach x bedeuten sollen.

Diese Differentialgleichungen gehören zu einer Klasse, deren allgemeine Form lautet

$$\ddot{e}_2+\varkappa\,\dot{e}_1+\varphi(x)\,e_2=0\,,\qquad \ddot{e}_1-\varkappa\,\dot{e}_2+\psi(x)\,e_1=0\,. \tag{29}$$

Dabei ist $\varkappa$ eine Konstante; $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $e_1(x)$ und $e_2(x)$ sind Funktionen der unabhängigen Variablen x.

Dem System (29) ist eine Differentialgleichung vierter Ordnung für $e_2(x)$ gleichwertig:

$$\psi\,e_2^{(4)}-\dot{\psi}\,e_2^{(3)}+(\psi^2+\psi\,\varkappa^2+\psi\,\varphi)\,\ddot{e}_2+(2\,\psi\,\dot{\varphi}-\dot{\psi}\,\varkappa^2-\dot{\psi}\,\varphi)\,\dot{e}_2+(\psi^2\varphi-\dot{\psi}\,\dot{\varphi}+\psi\,\ddot{\varphi})\,e_2=0\,. \tag{30}$$

Hat man eine Lösung $e_2(x)$ von (30), so erhält man die entsprechende Funktion $e_1(x)$ aus

$$e_1=\frac{1}{\varkappa\,\psi}\,[e_2^{(3)}+(\varphi+\varkappa^2)\,\dot{e}_2+\dot{\varphi}\,e_2]\,. \tag{31}$$

Das System (29) oder die damit gleichwertige Differentialgleichung (30) haben eine gewisse Bedeutung bei technischen Problemen, die hier in bezug auf das Allgemeine erläutert werden soll:

Fall I: Es seien φ und ψ Konstante. Auf diesen Fall lassen sich unter anderen die Differentialgleichungen folgender Probleme zurückführen:

I, 1) Der Spannungsfrei verwundene, von einer Einzelkraft an den Stabenden belastete Druckstab[1].

I, 2) Die tordierte und von einer Einzelkraft an den Stabenden belastete Welle[2].

I, 3) Das Foucaultsche Pendel[3].

I, 4) Kritische Drehzahlen für die einfach besetzte Welle[4].

In diesem Fall I baut sich das Fundamentalsystem der Lösungen aus trigonometrischen Funktionen auf, wie allgemein bekannt ist.

Fall II: Es seien φ und ψ lineare Funktionen von x. Hierzu gehören die oben genannten Probleme I, 1; I, 2 und I, 4; wofern man annimmt, daß zusätzlich auf Stab oder Welle ein axialer Druck wirkt, der von einer gleichmäßig über die Achse verteilten Belastung (z. B. Eigengewicht) herrührt. Es gehört also insbesondere auch das in dieser Arbeit zu erörternde Problem dazu. Das oben genannte Problem I, 3 verwandelt sich hier in das Problem von der Zwangsbewegung eines Punktes bei kleiner Auslenkung aus der Ruhelage auf der Fläche eines Rotations-Ellipsoides unter der Wirkung eines Kraftfeldes, dessen senkrecht zur (e_1, e_2)-Ebene stehender Kraftvektor linear von der Variablen x abhängig ist. Die Bewegung sei außerdem in einem gleichförmig rotierenden Achsenkreuz beschrieben. Für diesen Fall II muß eine allgemeine Lösung des Systems (29) noch aufgesucht werden.

Fall III: Es seien φ und ψ beliebige Funktionen von x. Dann ist die bei Fall II eingeführte Druckbelastung zwar kontinuierlich, aber nicht mehr gleichmäßig, sondern beliebig über die Achse von Stab und Welle verteilt, und im letztgenannten Problem ist der Kraftvektor beliebig von x abhängig. Dieser Fall III soll nicht weiter in Betracht gezogen werden.

Fall IV: Es kann noch der Sonderfall eintreten, daß $\varphi=\psi$ sind. Das trifft zu, wenn die Biegesteifigkeiten für beide Hauptträgheitsachsen in allen Querschnitten von Stab oder Welle einander

[1] S. Fußnote 3, Seite 262.
[2] S. Sußnote 4, Seite 262.
[3] *A. Sommerfeld*, Vorlesungen über theor. Physik Bd. I, S. 162—168. Leipzig 1944.
[4] *C. B. Biezeno* u. *R. Grammel*, Technische Dynamik Bd. II, S. 177. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1953.

gleich werden, bzw. wenn die Zwangsbewegung nicht auf der Fläche eines Rotations-Ellipsoides, sondern auf einer Kugelfläche erfolgt. Für den verwundenen Knickstab wird das Problem dann trivial; trotzdem soll auch dieser Sonderfall wenigstens hinsichtlich seiner mathematischen Behandlung eine kurze Betrachtung erfahren.

Für diese Arbeit hat nur der Fall II Bedeutung, da er auf den verwundenen Knickstab mit gleichförmig verteilter Druckbelastung zutrifft. Denn nach (28) und (29) ist

$$\left.\begin{aligned} q(x) &= [x + T^2 \lambda^{-2/3} (\varkappa^{-1} - 1)]\, \varkappa^3 , \\ \psi(x) &= \varkappa^2 x , \\ \alpha &= -(\varkappa + 1)\, \varkappa^{1/2}\, T \lambda^{-1/3} , \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

und das sind lineare Funktionen von x, bzw. es ist eine Konstante.

Unter Verwendung von (32) geht (30) über in

$$x\, e_2^{(4)} - e_2^{(3)} + (A x + B x^2)\, \ddot{e}_2 + (C x - A)\, \dot{e}_2 + (E x^3 + D x^2 - C)\, e_2 = 0 \tag{33}$$

mit den Abkürzungen

$$\left.\begin{aligned} A &= \varkappa(1 + 3\varkappa)\, T^2 \lambda^{-2/3} , \\ B &= \varkappa^2(1 + \varkappa) , \\ C &= \varkappa^3 , \\ D &= \varkappa^4(1 - \varkappa)\, T^2 \lambda^{-2/3} , \\ E &= \varkappa^5 . \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Ehe an eine Behandlung von (33) herangegangen wird, soll zuerst der Sonderfall $a = b$ (gleiche Hauptträgheitsmomente in allen Querschnitten) behandelt werden. Die hieraus hervorgehenden Lösungen gelten nur für die tordierte und gleichzeitig gedrückte Welle, für kritische Drehzahlen und nicht für den hier zu behandelnden Knickstab; aber man wird durch die mathematische Behandlung dieses Sonderfalles eine Verwandtschaft zwischen den Funktionen des Fundamentalsystems von (33) zu schon bekannten Funktionen erkennen, was von Interesse sein dürfte. Die ebenfalls vorhandene Verwandtschaft mit trigonometrischen Funktionen ist schon erwähnt worden.

Aus (26) und (32) folgt, daß für $a = b$ gilt

$$\varkappa = 1 , \qquad \alpha = -2\, T \lambda^{-1/3} , \qquad \varphi = \psi = x .$$

Dann ist das homogene Differentialgleichungssystem entartet zu

$$\ddot{e}_2 + \alpha\, \dot{e}_1 + x\, e_2 = 0 , \qquad \ddot{e}_1 - \alpha\, \dot{e}_2 + x\, e_1 = 0 , \tag{35}$$

und die Abkürzungen (34) werden zu

$$A = \alpha^2 , \quad B = 2 , \quad C = 1 , \quad D = 0 , \quad E = 1 .$$

Die gleichwertige Differentialgleichung vierter Ordnung lautet statt (33)

$$x\, e_2^{(4)} - e_2^{(3)} + (\alpha^2 x + 2 x^2)\, \ddot{e}_2 + (x - \alpha^2)\, \dot{e}_2 + (x^3 - 1)\, e_2 = 0 . \tag{36}$$

Für (36) läßt sich eine geschlossene Lösung mit bekannten Funktionen angeben. Man setze an

$$e_2 = r(x) \sin \frac{\alpha}{2} x \qquad \text{bzw.} \qquad e_2 = r(x) \cos \frac{\alpha}{2} x . \tag{37}$$

Geht man mit einem dieser Ansätze (37) in die Gleichung (36) ein, so erhält man in beiden Fällen als mögliche Bedingung für die Erfüllung von (36) die beiden getrennten Differentialgleichungen für r allein

$$\left.\begin{aligned} &x\, r^{(4)} - r^{(3)} + \left(2 x^2 - \frac{\alpha^2}{2} x\right) \ddot{r} + \left(x - \frac{\alpha^2}{4}\right) \dot{r} + \left(x^3 - \frac{\alpha^2}{2} x^2 - \frac{3}{16} \alpha^4 x - 1\right) r = 0 , \\ &x\, r^{(3)} - \frac{3}{4}\, \ddot{r} + \left(x^2 + \frac{\alpha^2}{4} x\right) \dot{r} + \left(\frac{1}{4} x - \frac{3}{16} \alpha^2\right) r = 0 . \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

Sie müssen beide gleichzeitig erfüllt sein.

Nun lassen sich aber die Gleichungen (38) umschreiben in

$$\left.\begin{aligned} x\,\frac{d^2}{dx^2}\left[\ddot{r}+\left(\frac{\alpha^2}{4}+x\right)r\right]-\frac{d}{dx}\left[\ddot{r}+\left(\frac{\alpha^2}{4}+x\right)r\right]+\left(x^2-\frac{3}{4}\alpha^2 x\right)\left[\ddot{r}+\left(\frac{\alpha^2}{4}+x\right)r\right]=0\,,\\ x\,\frac{d}{dx}\left[\ddot{r}+\left(\frac{\alpha^2}{4}+x\right)r\right]-\frac{3}{4}\left[\ddot{r}+\left(\frac{\alpha^2}{4}+x\right)r\right]=0\,. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$

Hieraus ersieht man als weitere Möglichkeit für die Erfüllung von (36), daß r als Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{r}+\left(\frac{\alpha^2}{4}+x\right)r=0 \tag{40}$$

zu bestimmen ist. Diese Differentialgleichung ist bekannt. Sie läßt sich mit

$$\frac{\alpha^2}{4}+x=z \tag{41}$$

auf die Gestalt

$$\frac{d^2r}{dz^2}+z\,r=0 \tag{42}$$

bringen. Hierfür sind die Lösungen

$$\left.\begin{aligned} r_1=z^{1/2}\,\Im_{1/3}\left(\frac{2}{3}\,z^{3/2}\right)=\left(\frac{\alpha^2}{4}+x\right)^{1/2}\Im_{1/3}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{\alpha^2}{4}+x\right)^{3/2}\right],\\ r_2=z^{1/2}\,\Im_{-1/3}\left(\frac{2}{3}\,z^{3/2}\right)=\left(\frac{\alpha^2}{4}+x\right)^{1/2}\Im_{-1/3}\left[\frac{2}{3}\left(\frac{\alpha^2}{4}+x\right)^{3/2}\right]. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Dabei sind $\Im_{1/3}$ bzw. $\Im_{-1/3}$ *Bessel*sche Funktionen des Argumentes $\frac{2}{3}\left(\frac{\alpha^2}{4}+x\right)^{3/2}$. Verwendet man (43) für den Ansatz (37), so sieht man, daß der Lösungsweg nicht nur möglich und hinreichend, sondern auch notwendig war; denn man hat durch (37) und (43) vier linear unabhängige Partikularlösungen von (36) gefunden und damit die Gleichung (36) vollständig gelöst.

Damit ist die Verwandtschaft der Funktionen des Fundamentalsystems von (33) mit den *Bessel*schen Funktionen von der Ordnung $\frac{1}{3}$ und $-\frac{1}{3}$ gezeigt.

Hat man aber $e_2(x)$ errechnet, so erhält man $e_1(x)$ gemäß (31) aus

$$e_1(x)=\frac{1}{\alpha\,x}\,[e_2^{(3)}+(\alpha^2+x)\,\dot{e}_2+e_2]\,, \tag{44}$$

was auf die beiden Lösungsgruppen

$$\left.\begin{aligned} e_2=\begin{Bmatrix}r_1\\ r_2\end{Bmatrix}\sin\frac{\alpha}{2}\,x \qquad \text{bzw.} \qquad e_1=\begin{Bmatrix}r_1\\ r_2\end{Bmatrix}\cos\frac{\alpha}{2}\,x\,,\\ \text{oder}\\ e_2=\begin{Bmatrix}r_1\\ r_2\end{Bmatrix}\cos\frac{\alpha}{2}\,x \qquad \text{bzw.} \qquad e_1=\begin{Bmatrix}r_1\\ r_2\end{Bmatrix}\sin\frac{\alpha}{2} \end{aligned}\right\} \tag{45}$$

führt.

Jetzt sei die Differentialgleichung (33) behandelt. Es ist eine lineare Differentialgleichung vierter Ordnung mit variablen Koeffizienten. Sie hat eine außerwesentliche Singularität (Stelle der Bestimmtheit) bei $x=0$ und eine wesentliche Singularität bei $x=\infty$. Hinsichtlich der Singularitäten verhält sich die Differentialgleichung demnach wie eine *Bessel*sche Differentialgleichung, mit der sie ja auch verwandt ist. Da keine weiteren Singularitäten auftreten, lassen sich die Lösungen durch Potenzreihen in x darstellen, die in der ganzen Ebene um $x=0$ als Mittelpunkt konvergent sind.

Geht man nach der Methode von *Frobenius*[1] vor, so erhält man vier partikuläre, linear unabhängige Lösungen von der Form

$$e_2(x)=x^t\sum_{r=0}^{r=\infty}a_r\,x^r\,. \tag{46}$$

[1] *Hort-Thoma*, Die Differentialgleichungen der Technik und Physik, S. 180—186. Leipzig 1950.

Die möglichen Werte von t sind dabei 4, 2, 1 und 0 als Wurzeln der determinierenden Gleichung

$$t(t-1)(t-2)(t-4)=0\,. \tag{47}$$

Obwohl diese Wurzeln ganzzahlige Differenzen haben, tritt hier der besondere Fall auf, daß die partikulären Lösungen von (33) allesamt keine Logarithmen enthalten. Das stimmt mit der schon bekannten Tatsache überein, daß die Lösungen (45) der Differentialgleichung (36) auch alle logarithmenfrei sind.

Die sechs ersten Koeffizienten a_r von (46) sind

$$\left.\begin{aligned} a_0&=1\,,\\ a_1&=0\,,\\ a_2&=-\frac{A}{(t+1)(t+2)}\,,\\ a_3&=-\frac{C+Bt}{(t+1)(t+2)(t+3)}\,,\\ a_4&=\frac{A^2}{(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)}\,,\\ a_5&=-\frac{(t+2)D-2AC-2(t+1)AB}{(t+1)(t+2)(t+3)(t+4)(t+5)}\,. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Sie ergeben sich aus der Rekursionsformel

$$\begin{aligned} a_0&=1\,,\\ a_1&=0\,,\\ a_k&=-a_{k-2}\frac{A}{(t+k)(t+k-1)}+a_{k-3}\frac{C+B(t+k-3)}{(t+k)(t+k-1)(t+k-2)}\\ &\quad+a_{k-5}\frac{D(t+k-3)}{(t+k)(t+k-1)\cdots(t+k-4)}+a_{k-6}\frac{E(t+k-3)}{(t+k)(t+k-1)\cdots(t+k-4)}\,. \end{aligned}$$

Setzt man nacheinander in (48) und (46) die vier möglichen Werte für t ein, so erhält man mit den vier Integrationskonstanten K_0, K_1, K_2, K_3 als allgemeine Lösung von (33)

$$\begin{aligned} e_2(x)&=K_0x^4\left\{1-\frac{A}{5\cdot6}x^2-\frac{C+4B}{5\cdot6\cdot7}x^3+\frac{A^2}{5\cdot6\cdot7\cdot8}x^4-\frac{6D-2AC-10AB}{5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9}x^5\pm\cdots\right\}\\ &\quad+K_1x^2\left\{1-\frac{A}{3\cdot4}x^2-\frac{C+2B}{3\cdot4\cdot5}x^3+\frac{A^2}{3\cdot4\cdot5\cdot6}x^4-\frac{4D-2AC-6AB}{3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7}x^5\pm\cdots\right\}\\ &\quad+K_2x\left\{1-\frac{A}{2\cdot3}x^2-\frac{C+B}{2\cdot3\cdot4}x^3+\frac{A^2}{2\cdot3\cdot4\cdot5}x^4-\frac{3D-2AC-4AB}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}x^5\pm\cdots\right\}\\ &\quad+K_3\left\{1-\frac{A}{2!}x^2-\frac{C}{3!}x^3+\frac{A^2}{4!}x^4-\frac{2D-2AC-2AB}{5!}x^5\pm\cdots\right\}. \end{aligned} \tag{49}$$

Zur Abkürzung sei der Begriff der „abgewandelten oder transmutierten *Bessel*-Funktionen" eingeführt:

$$\left.\begin{aligned} Bt_0(x)&=x^4\left\{1-\frac{A}{5\cdot6}x^2-\cdots\right\},\\ Bt_1(x)&=x^2\left\{1-\frac{A}{3\cdot4}x^2-\cdots\right\},\\ Bt_2(x)&=x\left\{1-\frac{A}{2\cdot3}x^2-\cdots\right\},\\ Bt_3(x)&=\left\{1-\frac{A}{2!}x^2-\cdots\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

Dann kann man als allgemeine Lösung des homogenen Systems (28) bzw. der damit gleichwertigen Differentialgleichung vierter Ordnung (33) schreiben

$$e_2(x)=\sum_{i=0}^{i=3}K_i\,Bt_i(x) \tag{51}$$

und gemäß (31) unter Verwendung von (32)

$$e_1(x) = -\frac{\lambda^{1/3}}{x\,T\,\varkappa^{5/2}(\varkappa+1)}\left\{e_2^{(3)} + [\varkappa^3 x + T^2\lambda^{-2/3}\varkappa(1+3\varkappa)]\,\dot{e}_2 + \varkappa^3 e_2\right\}. \tag{52}$$

Zu beachten ist noch, daß man beim Ausschreiben von $e_2(x)$ nach (51) oder in (52) für die Anwendung in der praktischen Rechnung die Konstanten A bis E gemäß (34) auszuschreiben hat.

6. Die Eigenwerte des Knickstabes. Bei den Knickfällen 2 und 3 von Abb. 1 sind die Stabenden querkraftfrei, und die Konstanten A^*, B^* sind nach (21) gleich Null. Die Differentialgleichungen (20) werden also homogen und lassen sich ohne weiteres in die Form (28) überführen. Die Lösungen des Problems sind daher unmittelbar durch (51) und (52) gegeben.

Bei den Knickfällen 1 und 4 sind die Stabenden dagegen nicht querkraftfrei; A^*, B^* sind von Null verschieden. Die Lösungen (51) und (52) des homogenen Problems können jetzt nicht unmittelbar verwendet werden; denn die Differentialgleichungen (20) sind inhomogen und gehen mit den Abkürzungen und Transformationen (26) und (27) statt in die Form (28) über in

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{e}_2 - (\varkappa+1)\,\varkappa^{1/2}\,T\,\lambda^{-1/3}\,\dot{e}_1 + [x + T^2\lambda^{-2/3}(\varkappa^{-1}-1)]\,\varkappa^3 e_2 \\
&\quad = -\bar{A}^*\sin[T(1-\varkappa\lambda^{-1/3}x-\lambda^{-1}T^2)] + \bar{B}^*\cos[T(1-\varkappa\lambda^{-1/3}x-\lambda^{-1}T^2)], \\
&\ddot{e}_1 + (\varkappa+1)\,\varkappa^{1/2}\,T\,\lambda^{-1/3}\,\dot{e}_2 + \varkappa^2 x\,e_1 \\
&\quad = \varkappa^{-1/2}\bar{A}^*\sin[T(1-\varkappa\lambda^{-1/3}x-\lambda^{-1}T^2)] + \varkappa^{-1/2}\bar{B}^*\cos[T(1-\varkappa\lambda^{-1/3}x-\lambda^{-1}T^2)].
\end{aligned}\right\} \tag{53}$$

Die allgemeinen Lösungen e_2 und e_1 dieser Gleichungen (53) kann man aber vermittels der bekannten homogenen Lösungen (51) und (52) allein durch Quadraturen (z. B. nach der Methode der Variation der Konstanten) finden. Da dies keine prinzipiellen Schwierigkeiten bietet, soll es hier nicht weiter verfolgt werden und es sollen auch die allgemeinen Lösungen des inhomogenen Falles vermöge (51), (52) grundsätzlich als bekannt angesehen werden.

a) Der homogene Fall. Gegeben sind

$\varkappa = \dfrac{b}{a}$ = Verhältnis der Hauptträgheitsmomente des Stabes,

$T = \tau\,l$ = Gesamtverwindung des Stabes;

gesucht ist

$\lambda = \dfrac{q\,l^3}{a}$ als Eigenwert des Problems;

vorgeschrieben sind gemäß Ziff. 3 durchweg homogene Randbedingungen:

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned} R_1[e_\eta, \dot{e}_\xi] &= 0, \\ R_2[e_\xi, \dot{e}_\eta] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{für } s = 0, \\
&\left.\begin{aligned} R_1[e_\eta, \dot{e}_\xi] &= 0, \\ R_2[e_\xi, \dot{e}_\eta] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{für } s = l.
\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Dabei sind die Randbedingungen $R_i[e_\gamma, \dot{e}_\beta]$ $(i = 1, 2;\ \beta, \gamma = \xi, \eta)$ lineare Verknüpfungen von $e_{\beta,\gamma}$ und deren Ableitungen.

Vermittels der Beziehungen (27) kann man die Randbedingungen (54) leicht umschreiben in solche für e_1, e_2 und x:

$$\left.\begin{aligned}
&\left.\begin{aligned} \bar{R}_1[e_2, \dot{e}_1] &= 0, \\ \bar{R}_2[e_1, \dot{e}_2] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{für } x = \varkappa^{-1}\lambda^{1/3}(1-\lambda^{-1}T^2), \\
&\left.\begin{aligned} \bar{R}_1[e_2, \dot{e}_1] &= 0, \\ \bar{R}_2[e_1, \dot{e}_2] &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{für } x = -\varkappa^{-1}\lambda^{-2/3}T^2.
\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Wendet man die Randbedingungen in der Form (55) auf die Lösungen (51) und (52) an, so erhält man im homogenen Fall bei vier Integrationskonstanten K_0 bis K_3 ein vierzeiliges lineares, homogenes Gleichungssystem

$$\left.\begin{aligned}
L_0(K) &= a_{00}K_0 + a_{01}K_1 + a_{02}K_2 + a_{03}K_3, \\
L_1(K) &= a_{10}K_0 + a_{11}K_1 + a_{12}K_2 + a_{13}K_3, \\
L_2(K) &= a_{20}K_0 + a_{21}K_1 + a_{22}K_2 + a_{23}K_3, \\
L_3(K) &= a_{30}K_0 + a_{31}K_1 + a_{32}K_2 + a_{33}K_3
\end{aligned}\right\} \tag{56}$$

zur Bestimmung der K_i $(i = 0, \ldots, 3)$. Die Koeffizienten $a_{i,\delta}$ $(i = 0, \ldots, 3;\ \delta = 0, \ldots, 3)$ sind dabei Ausdrücke, die sich aus den Größen $\varkappa$, $\hat{\lambda}$ und T zusammensetzen.

In bekannter Weise muß für eine eindeutige Bestimmung der K_i die Matrix des Systems (56) singulär, also die Determinante gleich Null sein:

$$\det L = \begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0\,. \tag{57}$$

Diese Determinante ist aber ein Ausdruck, der, wie seine Elemente, die Größen $\varkappa$, $\hat{\lambda}$ und T enthält:

$$\det L = \Phi(\varkappa, \hat{\lambda}, T) = 0\,. \tag{58}$$

Hierbei sind $\varkappa$ und T gegebene Größen, so daß (58) eine Bestimmungsgleichung für den Eigenwert $\hat{\lambda}$ darstellt, aus welcher man diese gesuchte Größe ausrechnen kann.

b) Der inhomogene Fall. Er unterscheidet sich von dem vorhergehenden Fall a) dadurch, daß jetzt gemäß (24) noch zwei Randbedingungen

$$\bar{R}_3[e_1, e_2, \tau] = 0\,, \qquad \bar{R}_4[e_1, e_2, \tau] = 0$$

für $s = l$ bzw. $x = -\varkappa^{-1}\hat{\lambda}^{-2/3}\,T^2$ hinzukommen. Ferner sind die Randbedingungen nicht auf die Lösungen (51) und (52), sondern auf die mit ihnen ermittelten inhomogenen Lösungen anzuwenden. Dann hat man, wie es sein muß, ein sechszeiliges lineares, homogenes Gleichungssystem zur Bestimmung der sechs Integrationskonstanten K_0 bis K_3 und $\bar{A}^*$, $\bar{B}^*$.

Alles übrige läuft, wenn auch mit mehr Arbeitsaufwand, wie vorher: aus der gleich Null gesetzten Determinante des linearen Gleichungssystems folgt eine Bestimmungsgleichung für den Eigenwert $\hat{\lambda}$.

7. Die numerische Rechnung. Für die zahlenmäßige Ermittlung von Eigenwerten werden die gemäß (51) und (52) in Reihenentwicklung vorliegenden Lösungen e_1 und e_2 wohl unhandlich sein. Der in Ziff. **6** geschilderte Lösungsweg für die Eigenwerte $\hat{\lambda}$ dürfte daher wohl nur grundsätzliche Bedeutung haben.

Für die wirkliche Durchführung der Rechnung soll daher hier ein anderer Weg beschrieben werden. Dabei soll der Einfachheit halber der homogene Knickfall 2 von Abb. 1 zu Grunde gelegt werden. Es wird nicht schwer sein, in einem anderen und auch inhomogenen Knickfall entsprechend vorzugehen.

Für den Knickfall 2 (Abb. 5) gelten das homogene Gleichungssystem (25) und die Randbedingungen (23) für beide Stabenden.

Abb. 5.

Die Gleichungen (25) werden durch

$$\left.\begin{aligned} \varkappa &= \frac{b}{a}\,; & T &= \tau\, l \\ \hat{\lambda} &= \frac{q\, l^3}{a}\,, & \sigma &= \frac{s}{l} \end{aligned}\right\} \tag{59}$$

übergeführt in

$$\left.\begin{aligned} &\ddot{e}_\eta + (1+\varkappa)\, T\, \dot{e}_\xi + [\hat{\lambda}(1-\sigma) - \varkappa\, T^2]\, e_\eta = 0\,, \\ &\ddot{e}_\xi - \frac{1+\varkappa}{\varkappa}\, T\, \dot{e}_\eta + [\hat{\lambda}(1-\sigma) - T^2]\, \varkappa^{-1}\, e_\xi = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{60}$$

wo jetzt und im folgenden Punkte Ableitungen nach σ bedeuten. Die Randbedingungen (23) gehen dadurch über in

$$\left.\begin{aligned} e_\eta(\sigma) &= 0 \\ e_\xi(\sigma) &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{für} \quad \sigma = \left\{\begin{matrix} 0\,, \\ 1\,. \end{matrix}\right\} \tag{61}$$

Auf die Differentialgleichungen in der Form (60) und die Randbedingungen in der Form (61) wird die Differenzenmethode angewendet. Denkt man sich den Stab in n Intervalle unterteilt, so erhält man

$$\left.\begin{aligned} &e_\eta^{i-1} - 2\,e_\eta^i + e_\eta^{i+1} + \frac{T}{2n}(1+\varkappa)(e_\xi^{i+1} - e_\xi^{i-1}) + \left[\lambda\left(1-\frac{i}{n}\right) - \varkappa\,T^2\right] n^{-2}\,e_\eta^i = 0\,,\\ &e_\xi^{i-1} - 2\,e_\xi^i + e_\xi^{i+1} - \frac{T}{2n}\,\frac{1+\varkappa}{\varkappa}(e_\eta^{i+1} - e_\eta^{i-1}) + \left[\lambda\left(1-\frac{i}{n}\right) - T^2\right]\varkappa^{-1}\,n^{-2}\,e_\xi^i = 0\,,\\ &e_\xi^0 = e_\eta^0 = e_\xi^n = e_\eta^n = 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

was ein finites, lineares Gleichungssystem für die Ordinaten der Näherungen von e_ξ, e_η darstellt; i läuft von 0 bis n.

Durch Ausrechnen der beiden oberen Gleichungen (62) erhält man die Rekursionsformeln

$$\left.\begin{aligned} e_\eta^{i+1} &= \frac{2n\varkappa S}{Z}\,e_\xi^{i-1} + \frac{U}{Z}\,e_\eta^{i-1} + \left(\frac{S\,V}{nZ} - \frac{S\lambda}{n^2 Z}\,i\right)e_\xi^i - \left(\frac{4\varkappa W}{Z} - \frac{4\varkappa\lambda}{nZ}\,i\right)e_\eta^i\,,\\ e_\xi^{i+1} &= \frac{U}{Z}\,e_\xi^{i-1} - \frac{2nS}{Z}\,e_\eta^{i-1} - \left(\frac{4V}{Z} - \frac{4\lambda}{nZ}\,i\right)e_\xi^i - \left(\frac{SW}{nZ} - \frac{S\lambda}{n^2 Z}\,i\right)e_\eta^i\,. \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

Dabei sind die folgenden Abkürzungen verwendet worden:

$$\begin{aligned} S &= 2\,T(1+\varkappa)\,,\\ U &= T^2(1+\varkappa)^2 - 4\,n^2\varkappa\,,\\ V &= \lambda - T^2 - 2\,n^2\varkappa\,,\\ W &= \lambda - \varkappa\,T^2 - 2\,n^2\,,\\ Z &= T^2(1+\varkappa)^2 + 4\,n^2\varkappa\,. \end{aligned} \tag{64}$$

Das Eigenwert- und damit Randwertproblem wird nunmehr auf ein Anfangswertproblem zurückgeführt. Das Differentialgleichungssystem (60) enthält den Eigenwert λ als Parameter, folglich werden die Lösungen von (60), bekannterweise, Funktionen dieses Parameters sein. Durch Variieren des Parameters λ wird es dann möglich sein, gerade die Lösungen von (60) zu finden, die die Randbedingungen (61) erfüllen; das sind die Eigenfunktionen des Problems; der zugehörige Wert λ ist gerade der gesuchte Eigenwert.

In der Durchführung sieht das so aus: Man nimmt einen bestimmten Zahlenwert für λ an; $\varkappa$ und T sind gegebene Zahlenwerte der Aufgabe. Damit errechnet man die Größen (64). Jetzt verwendet man als Anfangswerte die Randbedingungen $e_\xi^0 = e_\eta^0 = 0$. Da die Gleichungen (62) homogen sind, kann noch der Freiwert $e_\xi^{-1} = 1$ angenommen werden. e_η^{-1} bleibt als unbestimmte Größe in der Rechnung.

Nun kann man die Rekursionsformeln (63) anwenden und schrittweise alle Ordinaten e_ξ^i, e_η^i von $i = 0 \div n$ aufbauen.

Wendet man dann z. B. auf e_η^n die vorgeschriebene Randbedingung

$$e_{\eta/\sigma=1} = 0\,, \qquad \text{also} \qquad e_\eta^{i=n} = 0 \tag{65}$$

an, so folgt daraus eine Bestimmungsgleichung für die bisher unbestimmte Größe e_η^{-1}. Hat man ihren Wert errechnet, so kann man ihn in den Ausdruck für e_ξ^n einsetzen. Wird dieser Wert zu Null, wie es die letzte Randbedingung am Stabende vorschreibt, so war der Wert von λ gerade der gewünschte Eigenwert. Wird er dagegen nicht zu Null, so trägt man ihn als Fehler f in einem f, λ-Achsenkreuz auf.

Führt man dies für eine Reihe von angenommenen λ-Werten durch, so erhält man eine Fehlerfunktion $f(\lambda)$. Die Nullstellen dieser Funktion geben die Eigenwerte λ mit einer dem Differenzenverfahren zukommenden Genauigkeit.

Für die praktische Durchführung der Rechnung ist es vorteilhaft, die Anwendung der Rekursionsformel (63) als wiederholte Matrizenmultiplikation aufzufassen[1].

[1] *R. Zurmühl*, Matrizen, S. 382—384. Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958.

Es werden eingeführt der Zustandsvektor:

$$\mathfrak{z}^i = \begin{pmatrix} e_\xi^{i-1} \\ e_\eta^{i-1} \\ e_\xi^i \\ e_\eta^i \end{pmatrix} \tag{66}$$

und die Punktmatrix

$$\mathfrak{P}_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} & p_{34} \\ p_{41} & p_{42} & p_{43} & p_{44} \end{pmatrix} \tag{67}$$

mit den Elementen

$$\left.\begin{aligned} p_{31} &= \frac{U}{Z}, & p_{41} &= \frac{2\,n\varkappa\,S}{Z}, \\ p_{32} &= -\frac{2\,n\,S}{Z}, & p_{42} &= \frac{U}{Z}, \\ p_{33} &= -\frac{4\,V}{Z} + \frac{4\,\lambda}{n\,Z}\,i, & p_{43} &= \frac{S\,V}{n\,Z} - \frac{S\,\lambda}{n^2\,Z}\,i, \\ p_{34} &= -\frac{S\,W}{n\,Z} + \frac{S\,\lambda}{n^2\,Z}\,i, & p_{44} &= -\frac{4\varkappa\,W}{Z} + \frac{4\varkappa\,\lambda}{n\,Z}\,i, \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

wobei die Elemente p_{33}, p_{34}, p_{43}, p_{44} sich mit der von Schritt zu Schritt veränderlichen Größe i ändern.

Wendet man die Vektoren $\mathfrak{z}^i$ bzw. Matrizen $\mathfrak{P}_i$ auf die Rekursionsformel (63) an, so erhält man statt dieser

$$\mathfrak{z}^{i+1} = \mathfrak{P}_i\,\mathfrak{z}^i. \tag{69}$$

Läuft i von 0 bis $n-1$, so erhält man als Resultat der wiederholten Matrizenmultiplikation

$$\mathfrak{z}^n = \mathfrak{P}_{n-1}\,\mathfrak{P}_{n-2}\cdots\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_0\,\mathfrak{z}^0. \tag{70}$$

Man kann das Produkt $\mathfrak{P}_{n-1}\,\mathfrak{P}_{n-2}\cdots\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_0$ der Punktmatrizen noch zusammenfassen zur Übertragungsmatrix

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{pmatrix} = \mathfrak{P}_{n-1}\,\mathfrak{P}_{n-2}\cdots\mathfrak{P}_2\,\mathfrak{P}_1\,\mathfrak{P}_0. \tag{71}$$

Der Anfangsvektor

$$\mathfrak{z}^0 = \begin{pmatrix} e_\xi^{-1} \\ e_\eta^{-1} \\ e_\xi^0 \\ e_\eta^0 \end{pmatrix}$$

kann bezüglich seiner Elemente näher bestimmt werden. Auf Grund der Randbedingungen ist

$$e_\xi^0 = e_\eta^0 = 0;$$

wegen der Homogenität der Gleichungen (62) kann $e_\xi^{-1} = 1$ gesetzt werden. Nur e_η^{-1} bleibt unbestimmt. Damit kann man für $\mathfrak{z}^0$ schreiben

$$\mathfrak{z}^0 = \begin{pmatrix} 1 \\ e_\eta^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + e_\eta^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{72}$$

Auch bei

$$\mathfrak{d}^n = \begin{pmatrix} e_\xi^{n-1} \\ e_\eta^{n-1} \\ e_\xi^n \\ e_\eta^n \end{pmatrix}$$

lassen sich auf Grund der Randbedingungen die Elemente $e_\xi^n = e_\eta^n = 0$ festlegen:

$$\mathfrak{d}^n = \begin{pmatrix} e_\xi^{n-1} \\ e_\eta^{n-1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{73}$$

Verwendet man (71), (72) und (73), so wird aus (70)

$$\begin{pmatrix} e_\xi^{n-1} \\ e_\eta^{n-1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & u_{34} \\ u_{41} & u_{42} & u_{43} & u_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ e_\eta^{-1} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{74}$$

Beachtet man bei (74) die durch die Randbedingungen am Stabende vorgeschriebenen beiden letzten Zeilen, so erhält man

$$u_{31} + u_{32}\, e_\eta^{-1} = 0\,, \qquad u_{41} + u_{42}\, e_\eta^{-1} = 0\,. \tag{75}$$

Hieraus folgt

$$e_\eta^{-1} = -\frac{u_{41}}{u_{42}}. \tag{76}$$

Sollte man den zur Berechnung der $p_{\alpha,\beta}$ nach (68) und damit der $u_{\alpha,\beta}$ nach (71) verwendeten Betrag des Parameters λ gerade so passend gewählt haben, daß auch noch

$$u_{31} + u_{32}\, e_\eta^{-1} = 0 \tag{77}$$

ist, so hat man mit diesem Wert von λ einen Näherungswert für den Eigenwert gefunden und kann die bis auf einen gemeinsamen Faktor bestimmten Ordinaten der Eigenfunktionen auf Grund von (69) ausrechnen, weil man ja nun die Rechnung mit einem Vektor $\mathfrak{d}^0$ beginnen kann, bei dem in (72) für e_η^{-1} der gemäß (76) bekannte Zahlenwert eingesetzt werden kann.

Diese allgemeinen Ausführungen seien durch ein Zahlenbeispiel erläutert. Es sei ein Stab vorgelegt mit $\varkappa = b/a = 5$. Für die Unterteilung des Stabes sei $n = 10$ angenommen. Die Rechnung sei für verschiedene Gesamtverwindungen T des Stabes durchgeführt, und für jedes bestimmte T erhält man einen anderen Eigenwert λ^T. Für $T = 0$ (das ist der verwundene, gewöhnliche Knickstab unter gleichförmig verteilter Belastung, für den die Eigenwerte mittels *Bessel*scher Funktionen errechnet werden[1] hat man als erste beide Eigenwerte

$$\lambda_1^0 = 18{,}9\,, \qquad \lambda_2^0 = 81{,}8\,.$$

Mit allen Eigenwerten $\lambda_{1,2}^T$ wird das Verhältnis

$$k_{1,2}^T = \frac{\lambda_{1,2}^T}{\lambda_1^0} \tag{78}$$

gebildet und dieses dann als Funktion von T aufgetragen. Dieses Verhältnis gibt an, um wieviel der Eigenwert größer als der des unverwundenen Stabes ist; da stets $k \geqq 1$ ist, sieht man, daß durch das Verwinden des Stabes die Tragfähigkeit oft erheblich heraufgesetzt wird.

Für T sollen die Werte 0°, 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, 315°, 360° angenommen werden.

Ist z. B. $T = 180°$ so hat man für die Ausdrücke (64) und daraus für die Elemente $p_{\alpha,\beta}$ der Punktmatrizen $\mathfrak{P}_i$ (68) in Abhängigkeit von λ die in der Tabelle 1 angegebenen Werte.

[1] *Fr. A. Willers*, Z. angew. Math. Mech. 21 (1941) S. 43.

Tabelle 1. $T = 180°$; $\varkappa = 5$; $u = 10$
$S = 37{,}699$; $U = -1644{,}680$; $Z = 2355{,}320$

			p_{31}	p_{32}	p_{33}	p_{34}	p_{41}	p_{42}	p_{43}	p_{44}
λ	V	W	$\frac{U}{Z}$	$-\frac{2nS}{Z}$	$-\frac{4V}{Z}+\frac{4\lambda}{nZ}i$	$-\frac{SW}{nZ}+\frac{S\lambda}{n^2Z}i$	$\frac{2n\varkappa S}{Z}$	$\frac{U}{Z}$	$\frac{SV}{nZ}-\frac{S\lambda}{n^2Z}i$	$-\frac{4\varkappa W}{Z}+\frac{4\varkappa\lambda}{nZ}i$
20	—989,870	—229,350	—0,698	—0,320	1,681 + 0,003 i	0,367 + 0,003 i	1,600	—0,698	—1,584 — 0,003 i	1,948 + 0,017 i
25	—984,870	—224,350	—0,698	—0,320	1,673 + 0,004 i	0,359 + 0,004 i	1,600	—0,698	—1,576 — 0,004 i	1,905 + 0,021 i
30	—979,870	—219,350	—0,698	—0,320	1,664 + 0,005 i	0,351 + 0,005 i	1,600	—0,698	—1,568 — 0,005 i	1,863 + 0,025 i
35	—974,870	—214,350	—0,698	—0,320	1,656 + 0,006 i	0,343 + 0,006 i	1,600	—0,698	—1,560 — 0,006 i	1,820 + 0,030 i
40	—969,870	—209,350	—0,698	—0,320	1,647 + 0,007 i	0,335 + 0,006 i	1,600	—0,698	—1,552 — 0,006 i	1,778 + 0,034 i
45	—964,870	—204,350	—0,698	—0,320	1,639 + 0,008 i	0,327 + 0,007 i	1,600	—0,698	—1,544 — 0,007 i	1,735 + 0,038 i
50	—959,870	—199,350	—0,698	—0,320	1,630 + 0,008 i	0,319 + 0,008 i	1,600	—0,698	—1,536 — 0,008 i	1,693 + 0,042 i
55	—954,870	—194,350	—0,698	—0,320	1,622 + 0,009 i	0,311 + 0,009 i	1,600	—0,698	—1,528 — 0,009 i	1,650 + 0,047 i
60	—949,870	—189,350	—0,698	—0,320	1,613 + 0,010 i	0,303 + 0,010 i	1,600	—0,698	—1,520 — 0,010 i	1,608 + 0,051 i
65	—944,870	—184,350	—0,698	—0,320	1,605 + 0,011 i	0,295 + 0,010 i	1,600	—0,698	—1,512 — 0,010 i	1,565 + 0,055 i
70	—939,870	—179,350	—0,698	—0,320	1,596 + 0,012 i	0,287 + 0,011 i	1,600	—0,698	—1,504 — 0,011 i	1,523 + 0,059 i

Tabelle 2. $\lambda = 50$; $T = 180°$

					1	e_η^{-1}	
					1	0	
					0	1	
					0	0	l_0
					0	0	
$\mathfrak{P}_0$	0	0	1	0	0	0	
	0	0	0	1	0	0	$\delta^1 =$
	—0,698	—0,320	1,630	0,319	—0,698	—0,320	$\mathfrak{P}_0 \cdot \delta^0$
	1,600	—0,698	—1,536	1,693	1,600	—0,698	
$\mathfrak{P}_1$	0	0	1	0	—0,698	—0,320	
	0	0	0	1	1,600	—0,698	$\delta^2 =$
	—0,698	—0,320	1,638	0,327	—0,620	—0,752	$\mathfrak{P}_1 \cdot \delta^1$
	1,600	—0,698	—1,544	1,735	3,854	—0,717	
$\mathfrak{P}_2$	0	0	1	0	—0,620	—0,752	
	0	0	0	1	3,854	—0,717	$\delta^3 =$
	—0,698	—0,320	1,646	0,335	0,246	—1,031	$\mathfrak{P}_2 \cdot \delta^2$
	1,600	—0,698	—1,552	1,777	5,577	—0,132	
$\mathfrak{P}_3$	0	0	1	0	0,246	—1,031	
	0	0	0	1	5,577	—0,132	$\delta^4 =$
	—0,698	—0,320	1,654	0,343	1,519	—0,996	$\mathfrak{P}_3 \cdot \delta^3$
	1,600	—0,698	—1,560	1,819	6,079	0,666	
$\mathfrak{P}_4$	0	0	1	0	1,519	—0,996	
	0	0	0	1	6,079	0,666	$\delta^5 =$
	—0,698	—0,320	1,662	0,351	2,702	—0,660	$\mathfrak{P}_4 \cdot \delta^4$
	1,600	—0,698	—1,568	1,861	5,432	1,244	
$\mathfrak{P}_5$	0	0	1	0	2,702	—0,660	
	0	0	0	1	5,432	1,244	$\delta^6 =$
	—0,698	—0,320	1,670	0,359	3,457	—0,174	$\mathfrak{P}_5 \cdot \delta^5$
	1,600	—0,698	—1,576	1,903	4,266	1,349	
$\mathfrak{P}_6$	0	0	1	0	3,457	—0,174	
	0	0	0	1	4,266	1,349	$\delta^7 =$
	—0,698	—0,320	1,678	0,367	3,742	0,266	$\mathfrak{P}_6 \cdot \delta^6$
	1,600	—0,698	—1,584	1,945	3,353	0,975	
$\mathfrak{P}_7$	0	0	1	0	3,742	0,266	
	0	0	0	1	3,353	0,975	$\delta^8 =$
	—0,698	—0,320	1,686	0,375	3,788	0,504	$\mathfrak{P}_7 \cdot \delta^7$
	1,600	—0,698	—1,592	1,987	3,259	0,294	
$\mathfrak{P}_8$	0	0	1	0	3,788	0,504	
	0	0	0	1	3,259	0,294	$\delta^9 =$
	—0,698	—0,320	1,694	0,383	3,980	0,469	$\mathfrak{P}_8 \cdot \delta^8$
	1,600	—0,698	—1,600	2,029	4,199	—0,465	
$\mathfrak{P}_9$	0	0	1	0	3,980	0,469	
	0	0	0	1	4,199	—0,465	
					u_{31}	u_{32}	$\delta^{10} =$
	—0,698	—0,320	1,702	0,391	4,729	0,171	$\mathfrak{P}_9 \cdot \delta^9$
					u_{41}	u_{42}	
	1,600	—0,698	—1,608	2,071	6,082	—1,116	

$$e_\eta^{-1} = -\frac{u_{41}}{u_{42}} = +\frac{6{,}082}{1{,}116} = 5{,}450$$

$$f = u_{31} + u_{32} \cdot e_\eta^{-1} = 4{,}729 + 0{,}171 \cdot 5{,}450 = 5{,}661$$

Der erste Zustandsvektor, mit dem die Rechnung begonnen werden kann, ist gemäß (72) vorgeschrieben.

Sämtliche Elemente $p_{\alpha,\beta}$ der Punktmatrizen $\mathfrak{P}_i$ können aus der Tabelle 1 herausgelesen werden.

Die Rechnung nach der Vorschrift (69) wird in Tabellenform durchgeführt. Dies sei einmal für den Fall $T = 180°$; $\lambda = 50$ in der Tabelle 2 vorgeführt.

Aus der Tabelle 2 liest man

$$u_{41} = 6{,}082\,, \qquad u_{42} = -1{,}116$$

ab, also nach (76)

$$e_\eta^{-1} = \frac{6{,}082}{1{,}116} = 5{,}450\,.$$

Statt (77) erhält man nicht Null, sondern den Fehler

$$f(\lambda) = f(50) = u_{31} - u_{32}\frac{u_{41}}{u_{42}}\,,$$

der mit den Werten in der Tabelle 2 den Zahlenwert

$$f(50) = 4{,}729 + 5{,}450 \cdot 0{,}171 = 5{,}661$$

hat. Führt man nun ganz entsprechende Rechnungen für andere Werte von λ durch, so erhält man die Fehlerkurve Abb. 6.

Aus der Fehlerkurve liest man als Abszissen der ersten beiden Nullstellen die ersten beiden Eigenwerte ab zu

$$\lambda_1^{180} \approx 30{,}0; \qquad \lambda_2^{180} \approx 64{,}8\,.$$

Nach (78) gibt das

$$k_1^{180} = \frac{30{,}0}{18{,}9} = 1{,}58\,, \qquad k_2^{180} = \frac{64{,}8}{18{,}9} = 3{,}43\,.$$

Führt man die entsprechenden Rechnungen für $\varkappa = 5$, $n = 10$ und die übrigen Werte von $0° \leqq T \leqq 360°$ durch und trägt die zugehörigen k^T-Werte als Funktion von T auf, so erhält man Abb. 7.

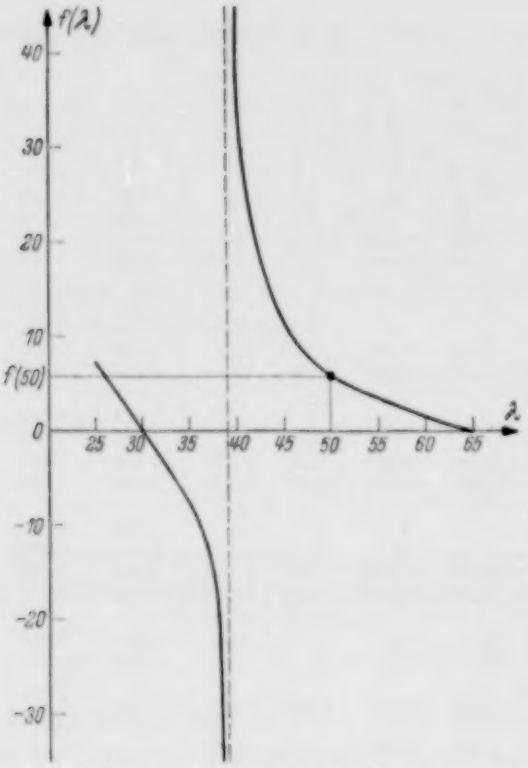


Abb. 6. Fehlerkurve $f(\lambda)$ für $T = 180°$.

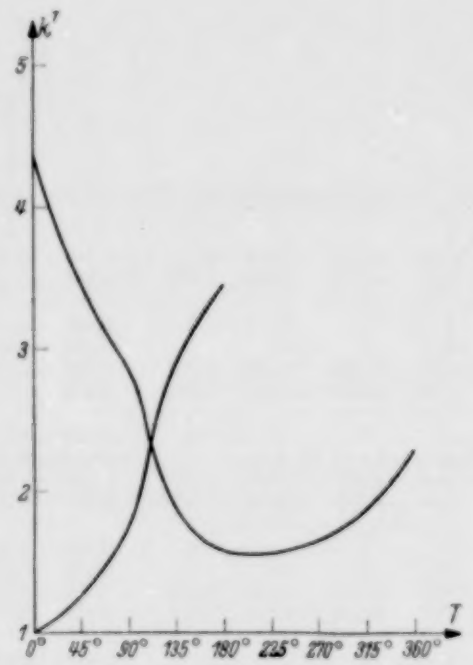


Abb. 7.

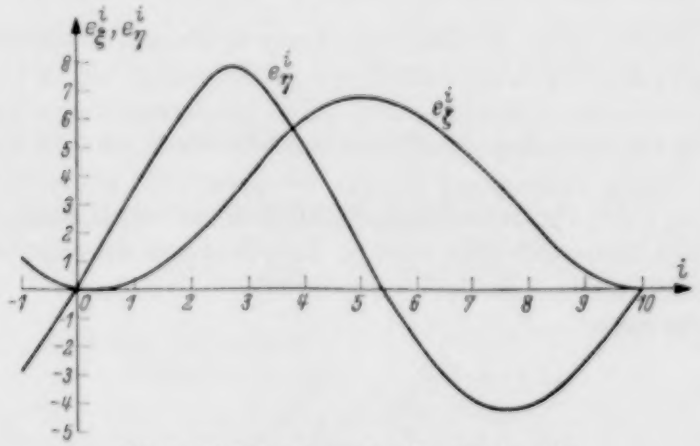


Abb. 8. Eigenfunktionen für $T = 180°$; $\lambda_1 = 30$.

In gleicher Weise könnte man für andere Knickfälle und andere $\varkappa$-Werte vorgehen. Man erhielte dadurch eine ganze Schar von Kurven. Ihre Verwendung in der Praxis geschähe folgendermaßen.

Dem Knickfall und dem $\varkappa$-Wert entsprechend sucht man die zuständige k^T-Kurve heraus. Der Gesamtverwindung T entsprechend liest man aus ihr k_1^T heraus. Hiermit bildet man

$$\frac{q\,l^3}{a} = \lambda_1^T = k_1^T \cdot 18{,}9\,.$$

Die Biegesteifigkeit a des Stabes wird ebenfalls eine gegebene Größe sein, so daß man bei bekannter Stablänge l für die kritische Last q findet

$$q = \frac{a\, k_1^T \cdot 18{,}9}{l^3}\,, \tag{78}$$

was das Ziel der ganzen Rechnung ist.

Tabelle 3. $\lambda = 30$; $T = 180°$

					1	e_η^{-1}	
					1	0	
					0	1	$\beta^0 =$
					0	0	
					0	0	
$\mathfrak{P}_0$	0	0	1	0	0	0	
	0	0	0	1	0	0	$\beta^1 =$
	−0,699	−0,320	1,665	0,350	−0,699	−0,320	$\mathfrak{P}_0 \cdot \beta^0$
	1,600	−0,699	−1,568	1,863	1,600	−0,699	
$\mathfrak{P}_1$	0	0	1	0	−0,699	−0,320	
	0	0	0	1	1,600	−0,699	$\beta^2 =$
	−0,699	−0,320	1,670	0,354	−0,601	−0,782	$\mathfrak{P}_1 \cdot \beta^1$
	1,600	−0,699	−1,573	1,889	4,122	−0,817	
$\mathfrak{P}_2$	0	0	1	0	−0,601	−0,782	
	0	0	0	1	4,122	−0,817	$\beta^3 =$
	−0,699	−0,320	1,675	0,358	0,446	−1,155	$\mathfrak{P}_2 \cdot \beta^2$
	1,600	−0,699	−1,578	1,915	6,605	−0,354	
$\mathfrak{P}_3$	0	0	1	0	0,446	−1,155	
	0	0	0	1	6,605	−0,354	$\beta^4 =$
	−0,699	−0,320	1,680	0,362	2,241	−1,260	$\mathfrak{P}_3 \cdot \beta^3$
	1,600	−0,699	−1,583	1,941	6,472	0,461	
$\mathfrak{P}_4$	0	0	1	0	2,241	−1,260	
	0	0	0	1	6,472	0,461	$\beta^5 =$
	−0,699	−0,320	1,685	0,366	3,719	−1,034	$\mathfrak{P}_4 \cdot \beta^4$
	1,600	−0,699	−1,588	1,967	5,268	1,307	

					1	e_η^{-1}	
$\mathfrak{P}_5$	0	0	1	0	3,719	−1,034	
	0	0	0	1	5,268	1,307	$\beta^6 =$
	−0,699	−0,320	1,690	0,370	4,597	−0,531	$\mathfrak{P}_5 \cdot \beta_5$
	1,600	−0,699	−1,593	1,993	3,636	1,914	
$\mathfrak{P}_6$	0	0	1	0	4,597	−0,531	
	0	0	0	1	3,636	1,914	$\beta^7 =$
	−0,699	−0,320	1,695	0,374	4,866	0,120	$\mathfrak{P}_6 \cdot \beta^6$
	1,600	−0,699	−1,598	2,019	2,263	2,145	
$\mathfrak{P}_7$	0	0	1	0	4,866	0,120	
	0	0	0	1	2,263	2,145	$\beta^8 =$
	−0,699	−0,320	1,700	0,378	4,751	0,773	$\mathfrak{P}_7 \cdot \beta^7$
	1,600	−0,699	−1,603	2,045	1,641	2,007	
$\mathfrak{P}_8$	0	0	1	0	4,751	0,773	
	0	0	0	1	1,641	2,007	$\beta^9 =$
	−0,699	−0,320	1,705	0,382	4,602	1,314	$\mathfrak{P}_8 \cdot \beta^8$
	1,600	−0,699	−1,608	2,071	1,963	1,606	
$\mathfrak{P}_9$	0	0	1	0	4,602	1,314	
	0	0	0	1	1,963	1,606	
					u_{21}	u_{22}	$\beta^{10} =$
	−0,699	−0,320	1,710	0,386	4,781	1,684	$\mathfrak{P}_9 \cdot \beta^9$
					u_{41}	u_{42}	
	1,600	−0,699	−1,613	2,097	3,148	1,082	

$$e_\eta^{-1} = -\frac{u_{41}}{u_{42}} = -\frac{3{,}148}{1{,}082} = -2{,}909$$

$$f = u_{21} + u_{22} \cdot e_\eta^{-1} = 4{,}781 - 1{,}684 \cdot 2{,}909 = -0{,}118$$

Tabelle 4. *Eigenfunktionen für* $\lambda = 30$; $T = 180°$; $e_\eta^{-1} = -2{,}909$

		e_i^ξ			e_η^i
$i = -1$	$1{,}000 + 0{,}000 \cdot 2{,}909 =$	1,000	$i = -1$	$0{,}000 - 1{,}000 \cdot 2{,}909 =$	−2,909
0	$0{,}000 + 0{,}000 \cdot 2{,}909 =$	0,000	0	$0{,}000 + 0{,}000 \cdot 2{,}909 =$	0,000
1	$-0{,}699 + 0{,}320 \cdot 2{,}909 =$	0,238	1	$1{,}600 + 0{,}699 \cdot 2{,}909 =$	3,633
2	$-0{,}601 + 0{,}782 \cdot 2{,}909 =$	1,674	2	$4{,}122 + 0{,}817 \cdot 2{,}909 =$	6,499
3	$0{,}446 + 1{,}155 \cdot 2{,}909 =$	3,806	3	$6{,}605 + 0{,}354 \cdot 2{,}909 =$	7,635
4	$2{,}241 + 1{,}260 \cdot 2{,}909 =$	5,906	4	$6{,}472 - 0{,}461 \cdot 2{,}909 =$	5,131
5	$3{,}719 + 1{,}034 \cdot 2{,}909 =$	6,727	5	$5{,}268 - 1{,}307 \cdot 2{,}909 =$	1,466
6	$4{,}597 + 0{,}531 \cdot 2{,}909 =$	6,142	6	$3{,}636 - 1{,}914 \cdot 2{,}909 =$	−1,932
7	$4{,}866 - 0{,}120 \cdot 2{,}909 =$	4,517	7	$2{,}263 - 2{,}145 \cdot 2{,}909 =$	−3,977
8	$4{,}751 - 0{,}773 \cdot 2{,}909 =$	2,502	8	$1{,}641 - 2{,}007 \cdot 2{,}909 =$	−4,197
9	$4{,}602 - 1{,}314 \cdot 2{,}909 =$	0,780	9	$1{,}963 - 1{,}606 \cdot 2{,}909 =$	−2,709
10	$4{,}781 - 1{,}684 \cdot 2{,}909 =$	−0,118	10	$3{,}148 - 1{,}082 \cdot 2{,}909 =$	0,000

Von Interesse ist noch das Aussehen der Eigenfunktionen. Nimmt man $\lambda = 30$ als ersten Eigenwert λ_1^{180} an, so kann man mit ihm die Tabelle 3 aufstellen. Wie vorher errechnet man

$$e_\eta^{-1} = -\frac{u_{11}}{u_{12}} = -\frac{3{,}148}{1{,}082} = -2{,}909\,,$$

und mit diesem Wert kann man nach (69) die Ordinaten der beiden Eigenfunktionen e_η und e_ξ ausrechnen, wie dies Tabelle 4 zeigt. Das graphische Bild der Eigenfunktionen ist in Abb. 8 dargestellt.

(Eingegangen am 26. Oktober 1959).

Anschrift des Verfassers: Dipl.-Math. *Horst Leipholz*, Stuttgart-Untertürkheim, Fiechtnerstr. 51.

Die Eigenfrequenzen verwundener Schaufeln*

Von **B. Jäger**

Diese Untersuchung ist Herrn Professor Dr.-Ing. E. h. K. von Sanden zum 75. Geburtstag gewidmet

1. Einführung. Im folgenden wird ein Verfahren zur Berechnung etwa der untersten vier Eigenfrequenzen von einseitig (elastisch oder starr) eingespannten und von gelenkig befestigten Schaufeln beschrieben. Torsionsschwingungen sind in der Untersuchung nicht enthalten. Es soll die Methode der Übertragungsmatrizen[1,2,3] angewendet werden. Das Problem ist für die Durchführung der Rechnung auf einem digitalen Rechenautomaten dargestellt. Durch die Anwendung von Übertragungsmatrizen unterscheidet sich diese Untersuchung von anderen Veröffentlichungen[4,5,6,7,8].

Der Rechnung liegt die Annahme zugrunde, daß die Schaufel sich wie ein Biegestab verhalte. Die Querschnitte quer zur Längsachse sollen in sich starr bleiben. Die Schaufel sei also durch eine im nicht deformierten Zustand gerade Linie ersetzt, welche mit Masse und Elastizität belegt ist, wobei aber die Biegeweichheit von der Richtung der Biegung abhängt, da die Schaufelquerschnitte „unrund" sind. Das Resultat der Rechnung wird also umso genauer mit der Wirklichkeit übereinstimmen, je schlanker die Schaufel ist. Erfahrungsgemäß genügt diese Annahme für Schaufeln von Axialverdichtern mit einem Verhältnis der Schaufelhöhe (in radialer Richtung) zur mittleren Profillänge von etwa 4,5 : 1 für die untersten vier Schwingungsgerade.

Wollte man die Eigenfrequenzen noch weiterer Schwingungsgrade berechnen, so müßte die Schaufel als Platte bzw. Schale betrachtet werden, da dann die Querschnitte nicht mehr als in sich starr angenommen werden können. Bei extrem kurzen Schaufeln mit einem Verhältnis von etwa 1 : 1 treten aus diesem Grunde schon bei der Grundschwingung Abweichungen auf, vor allem bei stark gewölbten dünnen Profilen. Bei Verdichterschaufeln ist die Rechnung genauer als bei Turbinenschaufeln, da diese im allgemeinen stärker gewölbt sind.

Da es also keinen Sinn hat, mit der Theorie der Biegung dünner Stäbe mehr als die untersten vier Eigenfrequenzen erfassen zu wollen, kann man mit hinreichender Genauigkeit die Schaufel in eine Anzahl Abschnitte unterteilen, welche aus masselosen elastischen Teilstücken und aus Punktmassen bestehen. Dies entspricht auch insofern den Gegebenheiten der Praxis, als von der aerodynamischen Berechnung her die Schaufel in einzelnen Profilschnitten gegeben ist. Man wird also an diesen Stellen die Daten der Schaufel (Fläche, größtes und kleinstes Trägheitsmoment, Lage der Hauptträgheitsachsen) aus den Profilschnitten berechnen. Damit wird die Schaufel zunächst als ein stufenartig unterteiltes Gebilde aufgefaßt, bei dem sich die geometrischen Daten (auch die Verwindung) sprunghaft jeweils an der Trennstelle zwischen zwei Abschnitten ändern. Im allgemeinen wird eine Unterteilung in zehn Abschnitte ausreichen.

2. Die Schaufel mit starrer Einspannung am Schaufelfuß. a) Allgemeines. Für die Schaufel sei das Koordinatensystem der Abb. 1 zugrunde gelegt. Darin bedeutet z die Längsrichtung (Achse der Schaufel in radialer Richtung), y die Richtung der Welle der Maschine und x die Umfangsrichtung. Die Schwerpunkte aller Schaufelschnitte senkrecht zu z sollen in nicht deformiertem Zustand der Schaufel auf der z-Achse liegen. Eine Abweichung der z-Achse von der radialen Richtung infolge des Ausgleichs[9] der aerodynamischen Kräfte kann hier ohne Beachtung bleiben. Die

---

* Die Untersuchung wurde bei der Firma Daimler-Benz AG in Stuttgart durchgeführt. Das Programm für den Magnettrommelrechner IBM 650 wurde von Herrn Dipl.-Ing. *R. Lorenz* von der gleichen Firma aufgestellt.

[1] *H. Fuhrke*, Ing.-Arch. 23 (1955) S. 329.

[2] *K. Marguerre*, J. Math. Phys. 35 (1956) S. 28.

[3] *E. Pestel, G. Schumpich, S. Spierig*, VDI-Berichte 35 (1959).

[4] *E. Maier*, Ing.-Arch. 11 (1940) S. 73.

[5] *A. Mendelson, S. Gendler*, NACA-TN 2300, Washington 1951.

[6] *D. D. Rosard*, J. Appl. Mech. 20 (1953) S. 241.

[7] *F. Njordson*, Acta Polytechnica, Mechanical Engineering, Series 3, Nr. 3 (1954).

[8] *J. C. Houbolt, G. W. Brooks*, NACA-TN 3905, Washington 1957.

[9] Es ist üblich, die Schaufeln soviel gegen die radiale Richtung geneigt einzubauen, daß sie bei der Höchstdrehzahl frei von Biegebeanspruchungen sind, in dem die Gaskräfte und die Fliehkräfte sich die Waage halten.

Koordinaten ξ und η seien die Hauptträgheitsachsen eines Schaufelschnittes; γ sei der Winkel zwischen den Achsen x und ξ bzw. y und η. Die Schaufel sei in n gleiche Abschnitte von der Länge Δz unterteilt. Die Punktmasse liege am Ende jedes Abschnitts. Dann wird beim untersten Abschnitt die halbe Masse an der Einspannung vernachlässigt (Abb. 2). Beim obersten Abschnitt wird nur die halbe Masse eingesetzt. Die Flächen S_i werden an den Stellen z_i genommen. Für die Trägheitsmomente $I_{\xi i}$ und $I_{\eta i}$ sind geeignete Mittelwerte einzusetzen (näheres siehe Ziff. 6). Zur Berechnung der Schwingungen von verwundenen Stäben[1] sind Matrizen von der achten Ordnung notwendig entsprechend den zweimal vier Vektorkomponenten (Verschiebung, Neigung, Moment M und Querkraft Q in zwei zueinander senkrechten Richtungen) eines Zustandsvektors

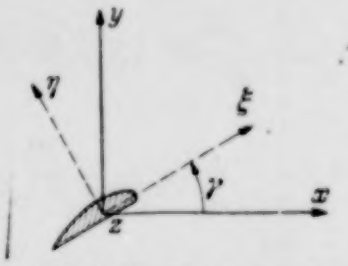


Abb. 1. Koordinatensystem.

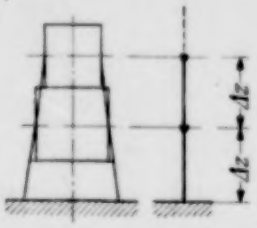


Abb. 2. Einteilung der Schaufel.

$$\mathfrak{y}_i = \begin{pmatrix} y \\ dy/dz \\ -M_y \\ -Q_y \\ \hline x \\ dx/dz \\ -M_x \\ -Q_x \end{pmatrix}_i . \tag{1}$$

Mit Rücksicht auf den später betrachteten Einfluß der Fliehkraft, welcher im Koordinatensystem (x, y) definiert ist, da der Einfluß in den beiden Richtungen verschieden groß ist, wird der obige Vektor im Koordinatensystem (x, y) angeschrieben. Nach der Methode der Übertragungsmatrizen kann man von dem Biegezustand an der Stelle $i-1$, beschrieben durch den Vektor $\mathfrak{y}_{i-1}$, auf den Biegezustand an der Stelle i mit dem Vektor $\mathfrak{y}_i$ durch Multiplikation mit der Abschnittsmatrix $\mathfrak{A}_{i,i-1}$ übergehen gemäß der Gleichung

$$\mathfrak{y}_i = \mathfrak{A}_{i,i-1}\, \mathfrak{y}_{i-1} . \tag{2}$$

Die Abschnittsmatrix stellt den Übergang über ein masseloses elastisches Stück mit der Elastizitätsmatrix $\mathfrak{L}$ und den Übergang über eine Punktmasse mit der Massenmatrix $\mathfrak{M}$ dar. Die Verwindungsmatrix $\mathfrak{V}$ berücksichtigt die Lage der Hauptträgheitsachsen des Schaufelquerschnitts. Mit diesen Matrizen läßt sich für die Abschnittsmatrix schreiben

$$\mathfrak{A}_{i,i-1} = \mathfrak{M}\, \mathfrak{V}\, \mathfrak{L}\, \mathfrak{V}^{-1} . \tag{3}$$

b) Die Elastizitätsmatrix $\mathfrak{L}$. Diese sei in den jeweiligen Hauptträgheitsachsen (ξ, η) des Querschnitts, welcher für einen Abschnitt maßgebend ist, definiert. Bei einer Biegung, welche in den Hauptträgheitsachsen erfaßt ist, verschwinden die Koppelungselemente der Matrix, was für die Elemente des rechten oberen und des linken unteren Viertels der Matrix zutrifft. Im linken oberen Viertel stehen nach *Fuhrke*[2] die Elemente für eine Biegung in einer Richtung, nämlich der Achse η mit dem Trägheitsmoment I_ξ (um die ξ-Achse), im rechten unteren Viertel die Elemente für eine Biegung in der Richtung ξ mit dem Trägheitsmoment I_η. Die Matrix lautet nun

$$\mathfrak{L} = \begin{pmatrix} 1 & \Delta z & \Delta z^2/2\,E\,I_\xi & \Delta z^3/6\,E\,I_\xi & & \\ 0 & 1 & \Delta z/E\,I_\xi & \Delta z^2/2\,E\,I_\xi & & \\ 0 & 0 & 1 & \Delta z & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & & \\ \hline & & & & 1 & \Delta z & \Delta z^2/2\,E\,I_\eta & \Delta z^3/6\,E\,I_\eta \\ & & 0 & & 0 & 1 & \Delta z/E\,I_\eta & \Delta z^2/2\,E\,I_\eta \\ & & & & 0 & 0 & 1 & \Delta z \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \tag{4}$$

[1] Vgl. Fußnote 3 auf S. 280.
[2] Vgl. S. 333 der in Fußnote 1 auf S. 280 zitierten Diss.

c) Die Verwindungsmatrix $\mathfrak{V}$. Diese stellt eine Koordinatentransformation vom System (ξ, η) auf das System (x, y) dar:

$$\mathfrak{V}_i = \left(\begin{array}{cccc|cccc} \cos\gamma & & & & \sin\gamma & & & \\ & \cos\gamma & & & & \sin\gamma & & \\ & & \cos\gamma & & & & \sin\gamma & \\ & & & \cos\gamma & & & & \sin\gamma \\ \hline -\sin\gamma & & & & \cos\gamma & & & \\ & -\sin\gamma & & & & \cos\gamma & & \\ & & -\sin\gamma & & & & \cos\gamma & \\ & & & -\sin\gamma & & & & \cos\gamma \end{array}\right). \qquad (5)$$

Zur Rücktransformation dient die Kehrmatrix $\mathfrak{V}^{-1}$, bei der nur die Vorzeichen der Elemente $\sin\gamma$ gegenüber $\mathfrak{V}$ vertauscht sind.

d) Die Massenmatrix. Die Massenkräfte der Schwingung treten in den einzelnen Punktmassen als jeweils neu hinzukommende Querlasten auf. Sie haben für die Masse i die Größe $\mu\,\omega^2\,S_i\,\Delta z\,y_i$ für die y-Richtung und $\mu\,\omega^2\,S_i\,\Delta z\,x_i$ für die x-Richtung mit μ als spezifischer Masse und S_i als Querschnittsfläche. Als Querlasten stehen die Werte $\mu\,\omega^2\,S_i\,\Delta z$ in der vierten und achten Zeile der Massenmatrix und in der ersten und fünften Spalte, da sie den Verschiebungen y_i und x_i des Vektors (1) zuzuordnen sind.

An den einzelnen Schaufelteilen greifen die Fliehkräfte C_i an, welche die Schaufel in die Null-Lage zurückzubringen versuchen. Die Fliehkräfte stehen bei einer Auslenkung der Schaufel in y-Richtung parallel zur z-Achse (Abb. 3a), bei einer Auslenkung der Schaufel in x-Richtung dagegen in der radialen Richtung (Abb. 3b). Die Fliehkräfte werden für diesen Fall in zwei Komponenten zerlegt. Die Komponente C' in z-Richtung ist der Größe nach etwa gleich der Fliehkraft C, da die Schwingungsausschläge klein sein sollen. Die Komponente quer zur Biegelinie der Schaufel U liege, wie die Massenkräfte der Schwingung, in der Richtung der Koordinate x.

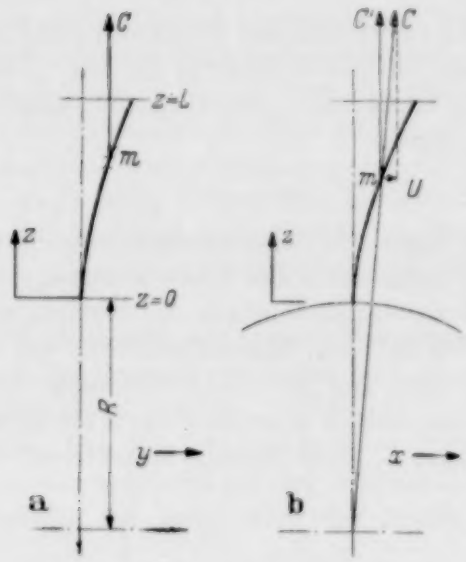


Abb. 3. Fliehkraft an einem Schaufelteil — a) in der Ebene y; z; b) in der Ebene x; z.

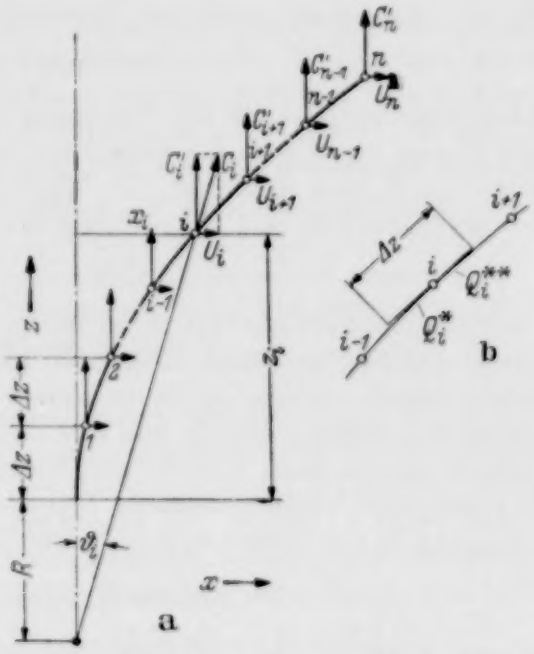


Abb. 4. Schaufel mit Fliehkräften in n Abschnitte unterteilt. — a) ganze Schaufel; b) Schaufel am Punkt i.

In Abb. 4 ist die Schaufel in n Abschnitte mit dem Index ν von 0 bis n unterteilt dargestellt. Die an den Massenpunkten angreifenden Fliehkräfte C_ν müssen von der obersten Masse m_n angefangen durch die darunter liegenden Abschnitte in den Schaufelfuß geleitet werden. Im Abschnitt $i+1/i$ sind alle Fliehkräfte von C_n bis C_{i+1} aufzunehmen, im Abschnitt i/i—1 alle Fliehkräfte von C_n bis C_i. Mit der Rotationsgeschwindigkeit Ω ist

$$C'_\nu \approx C_\nu = \mu\,\Omega^2\,S_\nu\,(R + z_\nu)\,\Delta z\,. \qquad (6)$$

Die innere Querkraft Q_i ist im Stab proportional zu der zu übertragenden Summe der Fliehkräfte und zum Neigungswinkel der Biegelinie gegen die z-Richtung. Die Komponente U_y soll vorläufig nicht berücksichtigt werden. Die innere Querkraft ist unterhalb des Punktes i (Abb. 4b)

$$\left.\begin{aligned} Q_i^{*} &= \mu\,\Omega^2 \sum_{\nu=n}^{i} S_\nu\,(R+z_\nu)\,\Delta z\left(\frac{dx}{dz}\right)_i \\ \text{und oberhalb des Punktes } i \qquad & \\ Q_i^{**} &= \mu\,\Omega^2 \sum_{\nu=n}^{i+1} S_\nu\,(R+z_\nu)\,\Delta z\left(\frac{dx}{dz}\right)_i . \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Bildet man daraus den Mittelwert für den Übergang über die Punktmasse, so erhält man als Änderung des Momentes für die Länge Δz

$$\Delta M_{x,i} = Q_{x,i}\,\Delta z = \left\{\mu\,\Omega^2\left[\frac{1}{2}\,S_i\,(R+z_i) + \sum_{\nu=n}^{i+1} S_\nu\,(R+z_\nu)\right]\Delta z^2\right\}\left(\frac{dx}{dz}\right)_i . \tag{8}$$

Der in der geschweiften Klammer stehende Ausdruck wird in der Massenmatrix in die siebte Zeile und sechste Spalte eingesetzt. Die entsprechende Gleichung gilt auch für die Auslenkung der Schaufel in y-Richtung

$$\Delta M_{y,i} = \left\{\mu\,\Omega^2\left[\frac{1}{2}\,S_i\,(R+z_i) + \sum_{\nu=n}^{i+1} S_\nu\,(R+z_\nu)\right]\Delta z^2\right\}\left(\frac{dy}{dz}\right)_i . \tag{9}$$

Der Ausdruck in der geschweiften Klammer wird in die dritte Zeile und zweite Spalte der Massenmatrix eingesetzt.

Nun ist noch die waagrechte Komponente der Fliehkräfte in x-Richtung zu berücksichtigen. Nach Abb. 4a besteht die Proportion

$$\frac{x_i}{R+z_i} = \frac{U_i}{C_i'} . \tag{10}$$

Dies ergibt für die Stelle i eine Querbelastung

$$U_i = \frac{x_i}{R+z_i}\,C_i' = \{\mu\,\Omega^2\,S_i\,\Delta z\}\,x_i . \tag{11}$$

Diese Querbelastung hat die gleiche Form wie die Massenkraft der Schwingung (es steht nur Ω statt ω) und die gleiche Richtung. Der Ausdruck in der geschweiften Klammer ist mit der Verschiebung x des Vektors (1) multipliziert. Er wird dem Element der achten Zeile und fünften Spalte der Massenmatrix hinzugefügt.

Die Massenmatrix der rotierenden Schaufel lautet nun

$$\mathfrak{M} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & & & & \\ 0 & \left\{\mu\,\Omega^2\left[\frac{1}{2}\,S_i\,(R+z_i) + \sum_{\nu=n}^{i+1} S_\nu\,(R+z_\nu)\right]\Delta z^2\right. & 1 & 0 & & \multicolumn{3}{c}{0} & \\ \mu\,S\,\omega^2\,\Delta z & 0 & 0 & 1 & & & & \\ \hline & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & \multicolumn{2}{c}{0} & & 0 & \left\{\mu\,\Omega^2\left[\frac{1}{2}\,S_i\,(R+z_i) + \sum_{\nu=n}^{i-1} S_\nu\,(R+z_\nu)\right]\Delta z^2\right. & 1 & 0 \\ & & & & \mu\,S\,(\omega^2+\Omega^2)\,\Delta z & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) . \tag{12}$$

e) Übergang von der Stelle $z = 0$ auf die Stelle $z = L$. Hierbei gilt, wenn man die einzelnen Abschnittsmatrizen (3) nach (2) aneinanderfügt,

$$\mathfrak{y}_n = (\mathfrak{M}\,\mathfrak{V}\,\mathfrak{L}\,\mathfrak{V}^{-1})_{n/n-1}\cdots(\mathfrak{M}\,\mathfrak{V}\,\mathfrak{L}\,\mathfrak{V}^{-1})_{i+1/i}\cdot(\mathfrak{M}\,\mathfrak{V}\,\mathfrak{L}\,\mathfrak{V}^{-1})_{i/i-1}\cdots(\mathfrak{M}\,\mathfrak{V}\,\mathfrak{L}\,\mathfrak{V}^{-1})_{1/0}\,\mathfrak{y}_0 . \tag{13}$$

Man kann also durch Multiplizieren aller Abschnittsmatrizen die Matrizengleichung für die Beziehungen zwischen Schaufelfuß ($z = 0$) und dem Ende der Schaufel ($z = L$) aufstellen mit der Gleichung (14), in welche die Randbedingungen eines einseitig eingespannten Stabes schon eingeführt sind. Dabei stellt die Matrix $\mathfrak{K}$ das Produkt aller Abschnittsmatrizen dar:

$$\mathfrak{y}_{z=L} = \mathfrak{K}\, \mathfrak{y}_{z=0} \tag{14}$$

oder ausführlich geschrieben

$$\begin{pmatrix} y \\ dy/dz \\ 0 \\ 0 \\ \hline x \\ dx/dz \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} \\ \hline K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} & K_{67} & K_{68} \\ K_{71} & K_{72} & K_{73} & K_{74} & K_{75} & K_{76} & K_{77} & K_{78} \\ K_{81} & K_{82} & K_{83} & K_{84} & K_{85} & K_{86} & K_{87} & K_{88} \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_y \\ -Q_y \\ \hline 0 \\ 0 \\ -M_x \\ -Q_x \end{pmatrix}. \tag{15}$$

Daraus ist ein Gleichungssystem mit vier Gleichungen zu entnehmen, deren Koeffizienten eingerahmt sind. Die Bedingung für die Berechnung des Eigenwertes ist, wie bekannt, daß die Determinante der Koeffizienten verschwindet. Man rechnet also für mehrere Werte von ω den Wert der Determinanten aus und sucht die Nullstellen auf. Die entsprechenden Werte von ω sind dann die Eigenfrequenzen.

3. Die elastisch eingespannte Schaufel. Um die Elastizität der Einspannung zu berücksichtigen kann man am Schaufelfuß eine weitere Matrix einführen. Die Weichheit der Einspannung kann in Umfangs- und Achsrichtung verschieden sein. Es ist also im Punkt $z = 0$ eine Änderung der Neigung der Biegelinie, nicht aber eine Verschiebung möglich. Die Einflußzahl h sei die Änderung der Neigung unter der Wirkung eines Momentes. Damit ergeben sich für die einzelnen Komponenten des Vektors (1) vor und hinter der Einspannung

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_0 = 0\,, & x_1 &= x_0 = 0\,, \\ \frac{dy_1}{dz} &= \frac{dy_0}{dz} - h_y\, M_{y,0}\,, & \frac{dx_1}{dz} &= \frac{dx_0}{dz} - h_x\, M_{x,0}\,, \\ M_{y,1} &= M_{y,0}\,, & M_{x,1} &= M_{x,0}\,, \\ Q_{y,1} &= Q_{y,0}\,, & Q_{x,1} &= Q_{x,0}\,. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Die Matrix für den Schaufelfuß lautet nun

$$\mathfrak{Q}_e = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & 0 & & & & & \\ & 1 & h_y & & & & 0 & \\ & & 1 & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & \\ \hline & & & & 1 & & 0 & \\ & & & & & 1 & h_x & \\ & & 0 & & & & 1 & \\ & & & & & & 0 & 1 \end{array}\right). \tag{17}$$

Diese Matrix steht in dem Matrizenprodukt nach Gl. (13) als erste Matrix am Schaufelfuß, also ganz rechts.

4. Die Gelenkschaufel. In der Praxis wird eine in Umfangsrichtung gelenkige Befestigung der Schaufeln in gewissen Fällen angewendet. Dabei befinden sich in axialer Richtung angeordnete Gelenkbolzen in der Scheibe.

a) Ideales Gelenk. Ein solches läßt sich durch Ändern der Randbedingungen in die bisherige Rechnung mit und ohne Fliehkrafteinfluß einführen. In der x-Richtung sind am Schaufelfuß die

Verschiebung und das Moment null. Damit tritt an die Stelle der Matrizengleichung (15) die Gleichung (18) als Beziehung zwischen dem Innen- und Außenrand des Problems

$$\begin{pmatrix} y \\ dy/dz \\ 0 \\ 0 \\ \hline x \\ dx/dz \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & K_{17} & K_{18} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & K_{27} & K_{28} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & K_{37} & K_{38} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} & K_{47} & K_{48} \\ \hline K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} & K_{57} & K_{58} \\ K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} & K_{67} & K_{68} \\ K_{71} & K_{72} & K_{73} & K_{74} & K_{75} & K_{76} & K_{77} & K_{78} \\ K_{81} & K_{82} & K_{83} & K_{84} & K_{85} & K_{86} & K_{87} & K_{88} \end{array}\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -M_y \\ -Q_y \\ \hline 0 \\ dx/dz \\ 0 \\ -Q_x \end{pmatrix}. \qquad (18)$$

$z = L$ $\qquad$ $z = 0$

Die eingerahmten Stellen bezeichnen die Koeffizienten des Gleichungssystems, aus dessen Determinante die Eigenwerte berechnet werden.

b) Wirkliches Gelenk. Tatsächlich können die Bedingungen eines Gelenks im höheren Drehzahlbereich nur durch eine Anordnung aufrechterhalten werden, welche reines Abrollen ohne Reibung gewährleistet[1]. Bei einem Bolzen oder einem Lavalfuß ohne Spiel würde die Reibung eine starre Einspannung erzeugen. Beim Abrollen verschiebt sich der Punkt der Auflage des Gelenks in Richtung x (Abb. 5). Der Winkel ε, welchen der durch den Berührungspunkt gehende Radius des Bolzens *2* mit der Senkrechten bildet, kann durch den Bolzenradius r_2, durch den Radius des zu einer Schlaufe erweiterten Schaufelfußes r_1 und durch die Neigung der Schaufel in x-Richtung folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\varepsilon = \frac{r_1}{r_1 - r_2}\left(\frac{dx}{dz}\right)_{z=0}. \qquad (19)$$

Die Verschiebung e des Berührungspunktes ist damit

$$e = \varepsilon\, r_2 = \frac{r_1\, r_2}{r_1 - r_2}\left(\frac{dx}{dz}\right)_{z=0}. \qquad (20)$$

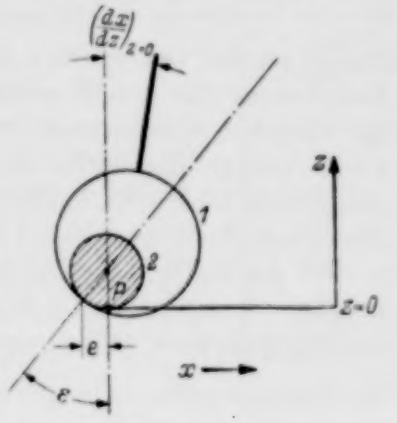


Abb. 5. Gelenk.

Das Biegemoment, welches durch das außermittige Angreifen der Fliehkräfte der ganzen Schaufel mit Schaufelfuß im Berührungspunkt entsteht, ist

$$M_{g,x} = e \sum_{\nu=0}^{n} C. \qquad (21)$$

Setzt man die Ausdrücke für e und C in die obige Gleichung ein, so erhält man

$$M_{g,x} = \left\{\frac{r_1\, r_2}{r_1 - r_2}\mu\,\Omega^2 \sum_{\nu=n}^{\nu=0} [S_\nu (R + z_\nu)\,\Delta z]\right\}\left(\frac{dx}{dz}\right)_{z=0}. \qquad (22)$$

Es läßt sich nun wieder eine Matrix des Gelenks aufstellen, indem man den Ausdruck in der geschweiften Klammer der Gleichung (22) der Neigung in x-Richtung zuordnet:

$$\mathfrak{M}_g = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & 0 & & \\ & & & 1 & & & & \\ \hline & & & & 1 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & 0 & & 0 & \frac{r_1\, r_2}{r_1 - r_2}\mu\,\Omega^2 \Sigma\, S\,(R + z)\,\Delta z & 1 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right). \qquad (23)$$

[1] Vgl. Fußnote 7 auf S. 280.

Diese Matrix wird in der gleichen Weise wie die Einspannungsmatrix (17) aus Ziff. 3 am Schaufelfuß, also in (13) ganz rechts, eingeführt. Nach dem Aufmultiplizieren gilt dann (18) für die Einführung der Randbedingungen und die Aufstellung der Determinanten. Durch Variation von ω findet man wie in Ziff. 2 die Stellen von ω, bei denen der Wert der Determinanten null ist.

5. Die Schwingungsform. Die Berechnung der Schwingungsform zu den Eigenfrequenzen geht bei der eingespannten Schaufel von Gleichung (15) aus. Mit den für eine Eigenschwingungszahl ω errechneten Koeffizienten kann man für die eingespannte Schaufel folgendes Gleichungssystem anschreiben:

$$\left.\begin{aligned} K_{33}\,M_y + K_{34}\,Q_y + K_{37}\,M_x + K_{38}\,Q_x &= 0\,,\\ K_{43}\,M_y + K_{44}\,Q_y + K_{47}\,M_x + K_{48}\,Q_x &= 0\,,\\ K_{73}\,M_y + K_{74}\,Q_y + K_{77}\,M_x + K_{78}\,Q_x &= 0\,,\\ K_{83}\,M_y + K_{84}\,Q_y + K_{87}\,M_x + K_{88}\,Q_x &= 0\,. \end{aligned}\right\} \tag{24}$$

Die Koeffizienten sind die gleichen, welche auch die Determinante zur Bestimmung von ω enthalten hatte. Das obige Gleichungssystem ist homogen, so daß man die vier Unbekannten nur in ihren Verhältnissen zueinander erhält. Setzt man eine davon gleich 1, so benötigt man nur noch drei Gleichungen. Man kann die übrigen drei Unbekannten aus folgendem Gleichungssystem bestimmen:

$$\left.\begin{aligned} K_{33}\,M_y + K_{34}\,Q_y + K_{37}\,M_x &= -\,K_{38}\,,\\ K_{43}\,M_y + K_{44}\,Q_x + K_{47}\,M_x &= -\,K_{48}\,, \qquad Q_x = 1\,.\\ K_{73}\,M_y + K_{74}\,Q_y + K_{77}\,M_x &= -\,K_{78}\,, \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Damit ist der Vektor für $z = 0$ bekannt. Man kann durch Multiplizieren mit der Matrix nach (15) den Vektor für $z = L$ ausrechnen. Die Zwischenvektoren folgen aus den Produkten der entsprechenden Abschnittsmatrizen nach (13). Um die Schwingungsform zu erhalten, entnimmt man den Vektoren die Werte für y und x. Man kann in einem Koordinatensystem $(y; x)$ die Schwingungsform als Kurve auftragen, wobei man die Stelle z an die Kurvenpunkte hinzuschreiben muß. Die Werte für y und x sind nur in ihrer relativen Größe gegeben.

Bei der Gelenkschaufel ist der Vorgang entsprechend (18) mit den dort eingerahmten Koeffizienten. Anstelle von $-M_x$ tritt hier dx/dz als Unbekannte im Vektor für $z = 0$ auf. Das dem Gleichungssystem (25) entsprechende System lautet für die Gelenkschaufel

$$\left.\begin{aligned} K_{33}\,M_y + K_{34}\,Q_y - K_{36}\,\frac{dx}{dz} &= -\,K_{38}\,,\\ K_{43}\,M_y + K_{44}\,Q_y - K_{46}\,\frac{dx}{dz} &= -\,K_{48}\,, \qquad Q_x = 1\,.\\ K_{73}\,M_y + K_{74}\,Q_y - K_{76}\,\frac{dx}{dz} &= -\,K_{78}\,, \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

Die vierte Gleichung

$$K_{83}\,M_y + K_{84}\,Q_y - K_{86}\,\frac{dx}{dz} = -\,K_{88} \tag{27}$$

wird auch hier nicht benötigt, kann aber verwendet werden, wenn man eine andere der obigen drei Gleichungen dafür wegläßt.

6. Zahlenbeispiel. Die Eigenfrequenzen einer Schaufel, welche in ihrer Biegsamkeit der Schaufel eines Axialverdichters der vorderen Stufen entspricht, wurden unter Annahme starrer Einspannung am Schaufelfuß und unter der Annahme einer gelenkigen Befestigung nach dem beschriebenen Verfahren berechnet. Die Daten sind in Tabelle 1 enthalten.

Tabelle 1. *Daten der Schaufel*

z	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
S mm²	210	192	175	162	152	144	137	132	128	125	123
J_ξ mm⁴	713	517	392	307	244	197	165	140	122	110	102
J_η mm⁴	30800	28150	25700	23650	22000	20800	19820	19060	18500	18050	17700
γ °	88,7	85,5	80,0	74,5	69,5	64,8	60,0	55,6	51,8	48,0	45,0

$L = 250$ mm, $\Omega = 628{,}27\ \mathrm{sec}^{-1}$, $E = 0{,}72 \cdot 10^4$ kg/mm²

$\Delta z = 25$ mm, $R = 250$ mm, $\mu = 2{,}854 \cdot 10^{-10}\ \frac{\mathrm{kg/sec}}{\mathrm{mm}^4}$

Gemäß Abb. 2 wird jeweils beim Abschnitt i—$1/i$ die Fläche von i eingesetzt und beim letzten Abschnitt die halbe Fläche. Bei den Trägheitsmomenten und dem Verwindungswinkel wird das arithmetische Mittel zwischen $i-1$ und i gebildet. Die so erhaltenen Werte stehen in Tabelle 2.

Tabelle 2. *Daten der Rechnung*

Abschnitt	0 → 0,1	0,1 → 0,2	0,2 → 0,3	0,3 → 0,4	0,4 → 0,5	0,5 → 0,6	0,6 → 0,7	0,7 → 0,8	0,8 → 0,9	0,9 → 1,0
S mm²	192	175	162	152	144	137	132	128	125	61,5
J_ξ mm⁴	615	454,5	349,5	275,5	220,5	181,0	152,5	131,0	116	106
J_η mm⁴	29475	26925	24675	22825	21400	20310	19440	18780	18275	14875
J °	87,1	82,75	77,25	72,45	67,15	62,4	57,8	53,7	49,9	46,5

Ferner wurde die Rechnung mit der Annahme eines Gelenks im Schaufelfuß durchgeführt, um das Schwingungsverhalten einer Gelenkschaufel zu untersuchen, ohne auf die Möglichkeit und Zweckmäßigkeit in der Praxis einzugehen. Dabei waren die Radien $r_1 = 13$ mm und $r_2 = 10$ mm bzw. 12,5 mm. Um die gleichen Daten (Tabelle 1 und 2) verwenden zu können, liege der Punkt P (Abb. 5) bei $z = 0$ der bisherigen Schaufel.

Die Eigenfrequenzen sind für die Schaufel mit starrer Einspannung und für die gelenkig befestigte Schaufel in Tabelle 3 zusammengestellt.

Tabelle 3. *Eigenfrequenzen in Hz*

	Rechnung											Versuch
	starre Einspannung			Gelenk $r_2 = 10$ mm				Gelenk $r_2 = 12{,}5$ mm				starre Einspannung
$\frac{\Omega}{2\pi}$ 1/s	0	50	100	0	5	50	100	0	5	50	100	0
Schwingungsgrad *I*	78	105	156,5	0	7,7	70	134	0	13,7	92,5	151	78
II	292	325	404	189	189,5	243,5	350,5	189	190	281,5	388	286
III	746	766	816	670	671	718	807	670	671	744	814	—
IV	959	993	1089	852	852	876,5	970	852	853	915	1048	1020

Für die nicht rotierende, starr eingespannte Schaufel wurden die Eigenfrequenzen gemessen[1] und in der letzten Spalte der Tabelle 3 zum Vergleich zu den gerechneten Werten in der ersten Spalte angeführt.

Tabelle 4. *Verschiebungen y und x der nicht rotierenden Schaufel*

	z/L	Starre Einspannung				Gelenkige Befestigung		
		I	*II*	*III*	*IV*	*II*	*III*	*IV*
y-Richtung	0,1	0,001	0,0000	0,086	0,00027	—0,001	—0,0008	0,0004
	0,2	0,004	0,0003	0,348	0,00106	—0,003	—0,0037	0,0015
	0,3	0,012	0,0009	0,857	0,00208	—0,010	—0,0108	0,0030
	0,4	0,029	—0,0005	1,705	0,00252	—0,027	—0,0240	0,0044
	0,5	0,056	—0,0034	2,855	0,00161	—0,059	—0,0419	0,0052
	0,6	0,095	—0,0143	3.990	—0,00042	—0,112	—0,0573	0,0055
	0,7	0,145	—0,0345	4,529	—0,00171	—0,190	—0,0591	0,0064
	0,8	0,204	—,00645	3,951	0,00027	—0,290	—0,0381	0,0090
	0,9	0,267	—0,1019	2,210	0,00650	—0,406	0,0054	0,0135
	1,0	0,333	—0,1425	—0,182	0,01539	—0,527	0,0611	0,0192
x-Richtung	0,1	—0,012	—0,0058	0,201	—0,00193	—0,082	—0,0239	—0,0050
	0,2	—0,051	—0,0211	0,560	—0,00614	—0,154	—0,0385	—0,0095
	0,3	—0,119	—0,0415	0,534	—0,01005	—0,207	—0,0355	—0,0120
	0,4	—0,218	—0,0605	—0,195	—0,01083	—0,230	—0,0130	—0,0116
	0,5	—0,335	—0,0714	—1,435	—0,00710	—0,211	0,0211	—0,0079
	0,6	—0,497	—0,0687	—2,479	—0,00032	—0,149	0,0502	—0,0022
	0,7	—0,668	—0,0500	—2,401	0,00571	—0,045	0,0558	0,0034
	0,8	—0,852	—0,0172	—0,629	0,00728	0,092	0,0280	0,0070
	0,9	—1,043	0,0250	2,658	0,00355	0,248	—0,0287	0,0083
	1,0	—1,236	0,0709	6,697	—0,00318	0,411	—0,0994	0,0082

[1] *P. Hermann*, Konstruktion (im Druck).

In Abb. 6 sind die Eigenfrequenzen über der Rotationsgeschwindigkeit $\Omega/2\pi$ aufgetragen. Bei der eingespannten Schaufel sind die untersten vier Eigenfrequenzen als Kurven E_1 bis E_4 aufgezeichnet. Da es sich um biegsame Schaufeln handelt, ist der Einfluß der Fliehkraft bedeutend. Die Kurven gehen von der Ordinatenachse mit waagrechter Tangente aus.

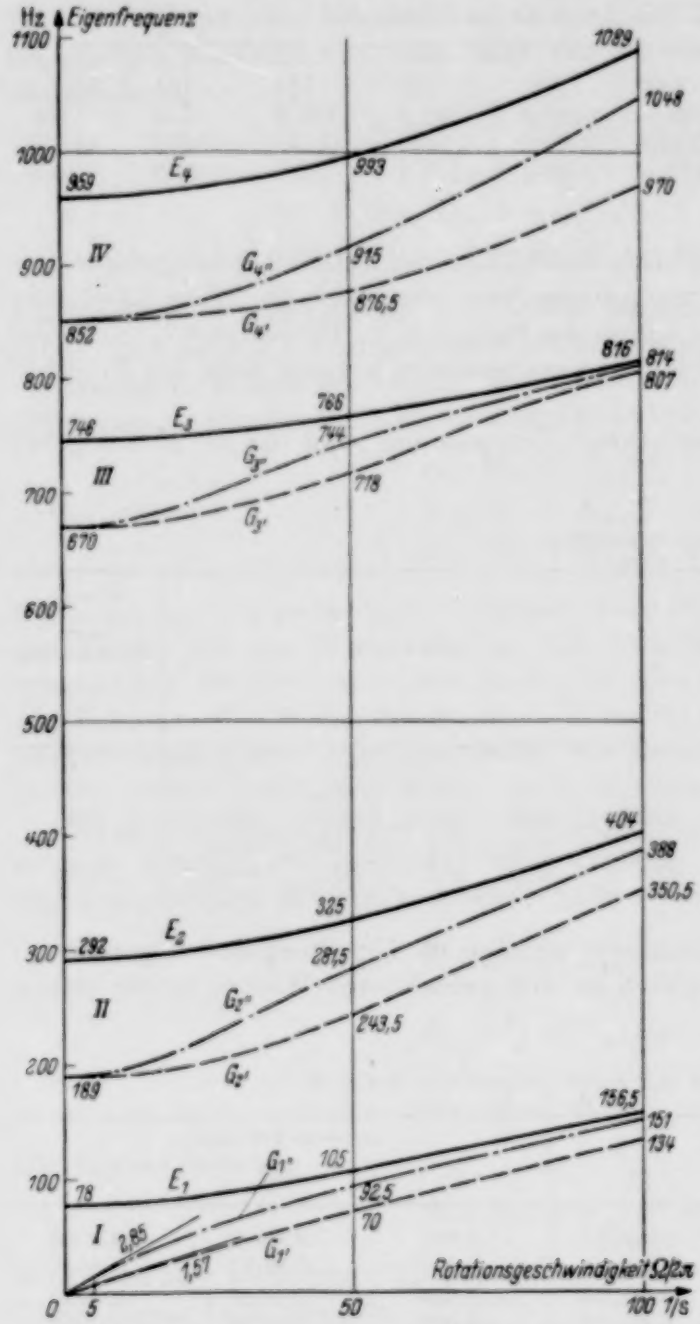


Abb. 6. Die Eigenfrequenzen der starr eingespannten und der gelenkig befestigten Schaufel.

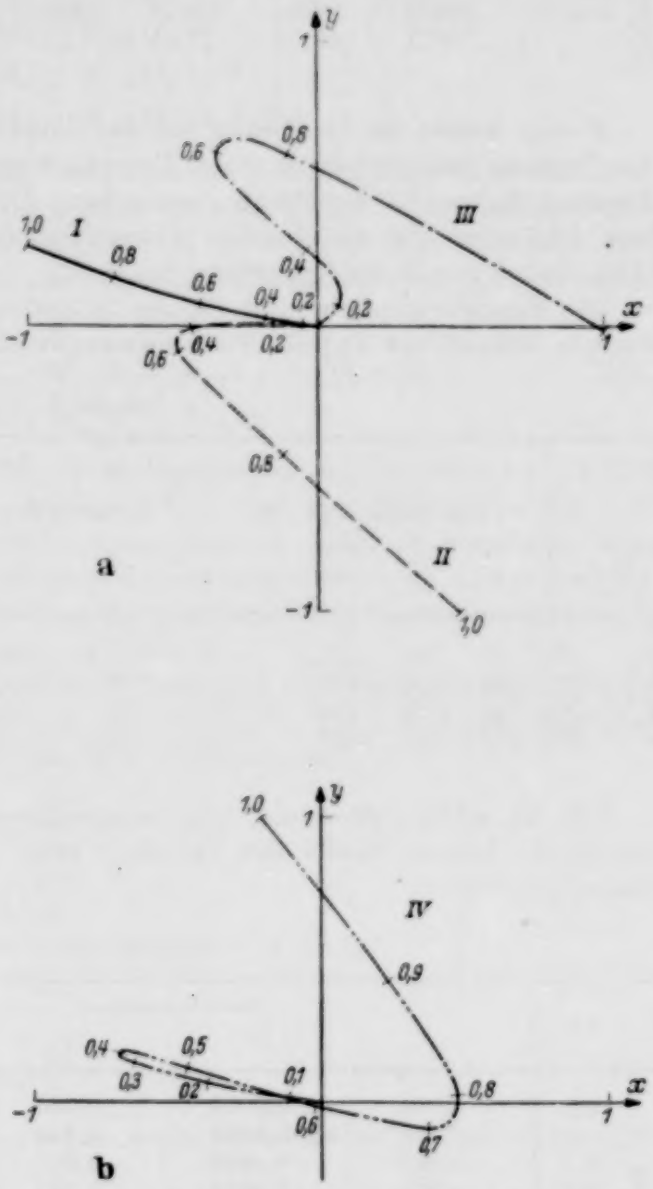


Abb. 7. Schwingungsformen der starr eingespannten Schaufel. — a) Grundschwingung, erste und zweite Oberschwingung; b) dritte Oberschwingung.

Für die gelenkig befestigte Schaufel sind die Kurven der Eigenfrequenzen für $r_2 = 10$ mm mit der Bezeichnung G_1' bis G_4' und für $r_2 = 12{,}5$ mm mit der Bezeichnung G_1'' bis G_4'' aufgetragen. Die Kurven der Gelenkschaufel nähern sich für wachsende Rotationsgeschwindigkeit den Kurven für die eingespannte Schaufel. Am interessantesten ist dabei der Verlauf der Kurven G_1' und G_1''. Diese kommen nicht mehr mit allen erregenden Ordnungsstrahlen zum Schnitt. Die Kurve G_1' geht mit der Neigung 1,57, die Kurve G_1'' mit der Neigung 2,85 vom Nullpunkt aus. Die Kurve G_1' kommt also selbst mit der zweiten Ordnung der Drehzahl nicht mehr in Resonanz, die Kurve G_1'' nicht mehr mit der dritten Ordnung. Das günstigere Schwingungsverhalten der Kurve G_1' muß aber mit einer größeren Flächenpressung der beiden zylindrischen Körper des Gelenks erkauft werden.[1,2]

[1] *K. Löffler*, VDI-Berichte 24 (1957) S. 27.
[2] *G. Hirsch*, Jahrbuch d. Wiss. Ges. f. Luftfahrt 1958, S. 174.

Nach Ziff. 5 sind die Schwingungsformen für $\Omega = 0$ mit $Q_{x\,0} = 1$ für die eingespannte und die gelenkig befestigte Schaufel berechnet worden. Die Verschiebungen y und x sind in der Tabelle 4 enthalten. Bei der Gelenkschaufel ist die Eigenfrequenz der Grundschwingung null für $\Omega = 0$; damit entfällt es, die Schwingungsform *I* darzustellen.

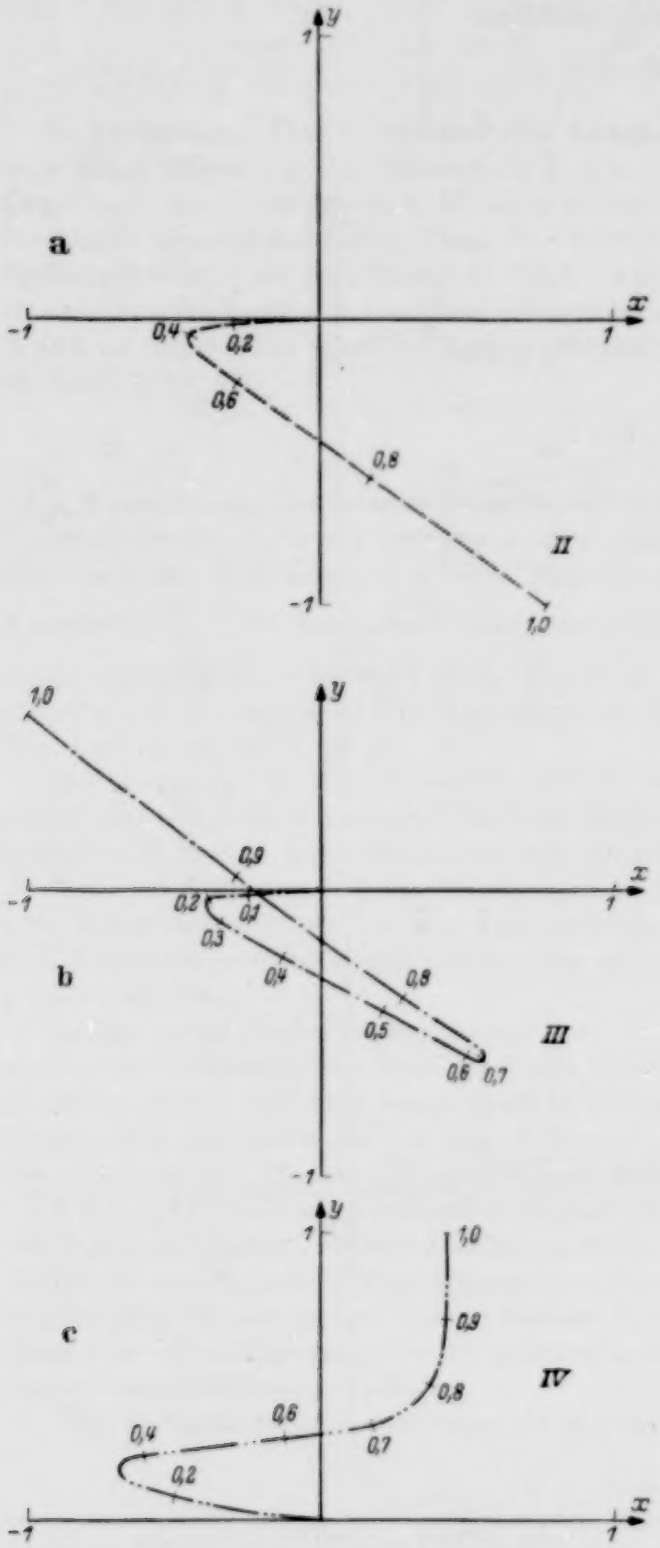


Abb. 8. Schwingungsformen der gelenkig befestigten Schaufel. — a) erste; b) zweite; c) dritte Oberschwingung.

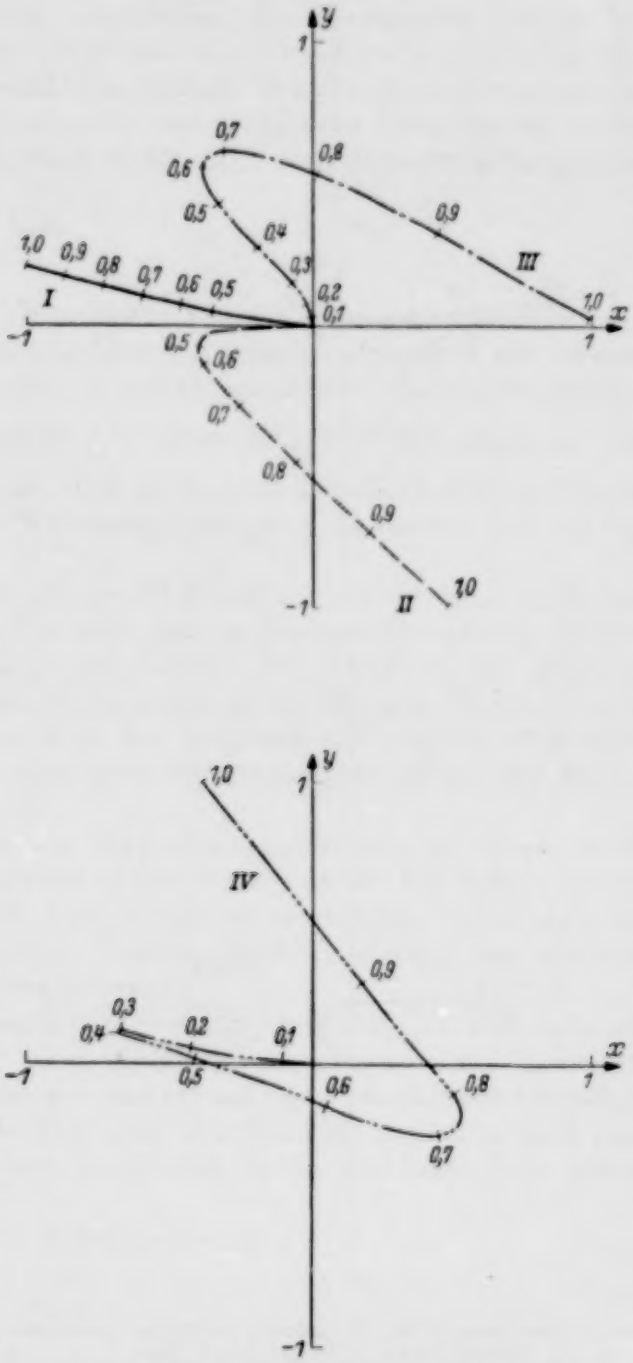


Abb. 9. Schwingungsformen der starr eingespannten mit $\Omega/2\pi = 100$ 1/s rotierenden Schaufel.

Die Probe ist mit Hilfe der Bedingung der Orthogonalität[1]

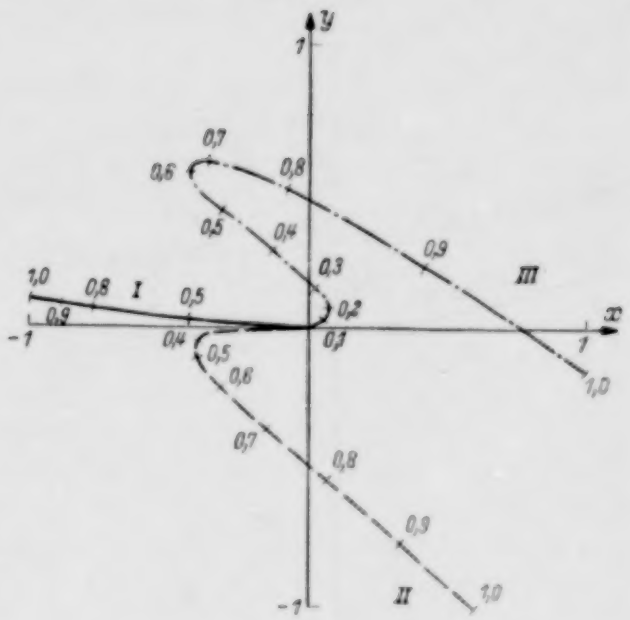
$$\mathfrak{w}'_\alpha \, \mathfrak{S} \, \mathfrak{w}_\beta = 0 \qquad \text{für} \qquad \alpha \neq \beta$$

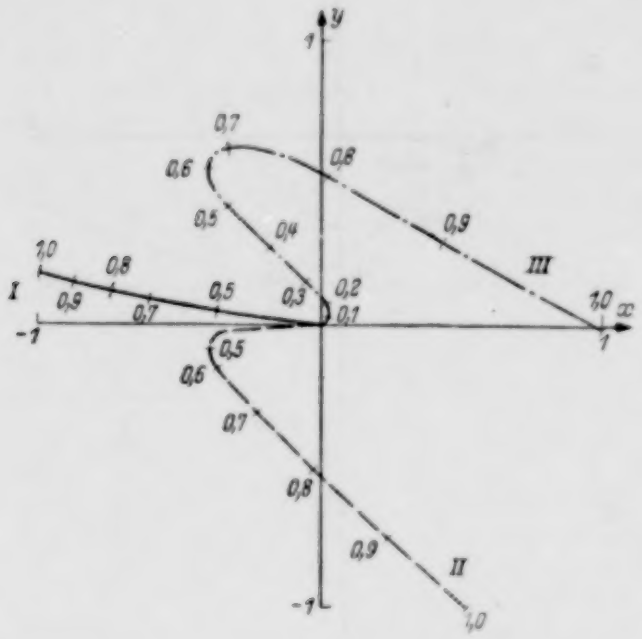
durchgeführt worden. Jede Spalte in der Tabelle 4 wurde dabei als Eigenvektor $\mathfrak{w}$ mit zwanzig Komponenten aufgefaßt. Die Schwingungsgrade sind mit α und β bezeichnet. Die Massenmatrix $\mathfrak{S}$

[1] *B. Jäger*, Ing.-Arch. 27 (1959) S. 51.

ist durch den Verlauf der Fläche S über die Länge ζ gegeben

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} S_{0,1} & \cdots & S_{1,0} & & 0 \\ & & & & \\ 0 & & & S_{0,1} & \cdots & S_{1,0} \end{pmatrix}.$$





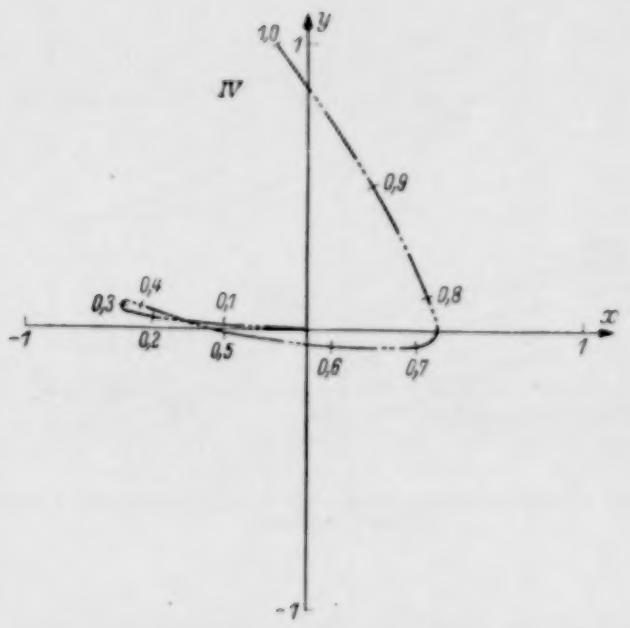


Abb. 10. Schwingungsformen der gelenkig befestigten rotierenden Schaufel ($\Omega/2\,\pi = 100$ 1/s; $r_2 = 10$ mm).

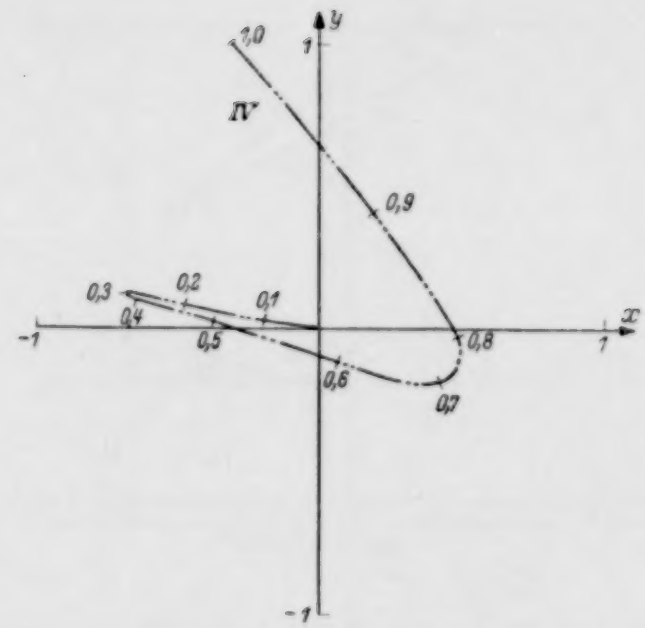


Abb. 11. Schwingungsformen der gelenkig befestigten rotierenden Schaufel ($\Omega/2\,\pi = 100$ 1/s; $r_2 = 12{,}5$ mm).

In Abb. 7 und 8 ist zu den Schwingungsformen die Koordinate z als $\zeta = z/L$ hinzugeschrieben. Die Elemente der Eigenvektoren aus Tab. 4 sind zur Normierung jeweils durch die größte Komponente dividiert worden. In Abb. 9, 10 und 11 sind die Schwingungsformen der rotierenden Schaufel aufgezeichnet.

(Eingegangen am 6. November 1959.)

Anschrift des Verfassers: Dr.-Ing. *Berthold Jäger*, Stuttgart-Wangen, Kemptenerstr. 22 .

Analyse von Messungen turbulenter Grenzschichten mittels der Wandgesetze

Von W. Szablewski

1. Einleitung. Das logarithmische Geschwindigkeitsgesetz turbulenter Grenzschichten kann man bekanntlich aus der Bedingung $\tau \approx \tau_0$ (τ Schubspannung, τ_0 Wandschubspannung) auf der Grundlage der *Prandtl*schen Mischungsweghypothese erschließen. Die Bedingung besagt, daß innerhalb einer wandnahen Zone der Grenzschicht Trägheits- und Druckkräfte gegenüber den Reibungskräften vernachlässigbar sind. Die Vernachlässigbarkeit der Trägheitsglieder in der Bewegungsgleichung der Grenzschichtströmung erscheint für eine wandnahe Zone aus der an der Wand zu erfüllenden Haftbedingung gerechtfertigt. Man erhält dann zunächst durch Integration die Gleichung

$$\tau = \tau_0\left(1 + \frac{dp/dx}{\tau_0}\, y\right) \tag{1}$$

(x, y Koordinaten längs und normal zur Wand; p statischer Druck). Die Existenzschicht des logarithmischen Gesetzes ist nun weiter gekennzeichnet durch Vernachlässigbarkeit des zweiten Gliedes in der Klammer gegen Eins. Man ersieht aber auch aus (1) unmittelbar, daß für wachsenden Parameter $\frac{dp/dx}{\tau_0}$ die Existenzschicht des logarithmischen Gesetzes immer weiter eingeengt und dieses schließlich ausgelöscht wird. Damit ist evident, daß im Bereich turbulenter Grenzschichtströmungen mit starkem Druckanstieg und kleiner Wandschubspannung ein anderes als das log. Wandgesetz zu erwarten ist.

Mit Ausgang von Gleichung (1) und auf der Grundlage der Prandtlschen Mischungsweghypothese habe ich in zwei Arbeiten[1] ein dem Einfluß des Druckgradienten Rechnung tragendes „Wandgesetz turbulenter Grenzschichten mit Druckanstieg" aufgestellt. Der Vergleich mit den von *J. Nikuradse*[2] durchgeführten Messungen turbulenter Strömungen in divergenten Kanälen ergab gute Übereinstimmung. In der vorliegenden Arbeit wird der Vergleich mit neueren Messungen von Profilströmungen durchgeführt, die gleichfalls eine gute Bestätigung des genannten Wandgesetzes ergeben.

Einige prinzipielle Bemerkungen zur *Prandtl*schen Hypothese erscheinen an dieser Stelle angebracht. Ihren ersten Erfolg zeitigte diese Hypothese in der Herleitung des log. Gesetzes.[3] Die Existenz dieses Gesetzes kann man allerdings auch hypothesenfrei erschließen, wenn man annimmt, daß einerseits ein von den äußeren Bedingungen unabhängiges Wandgesetz und andererseits ein von der Zähigkeit unabhängiges Mittengesetz existiert[4].

Doch spricht dieser Umstand natürlich nicht gegen die *Prandtl*sche Annahme. Daß man aus ihr das logarithmische Gesetz ableiten kann, stellt eine Stütze der Hypothese dar. Wenn nun weiter die vorliegende Untersuchung eine Bestätigung des aus (1) auf der *Prandtl*schen Grundlage abgeleiteten Wandgesetzes für turbulente Grenzschichten mit Druckanstieg ergibt, so muß man darin eine Konsolidierung der *Prandtl*schen Hypothese, zumindest für die wandnahe Zone turbulenter Grenzschichten, erblicken.

Die *Prandtl*sche Formulierung ür die turbulente Schubspannung

$$\tau_{\text{turb.}} = \varrho\, l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \tag{2}$$

(ϱ Dichte, u Geschwindigkeitskomponente in x-Richtung) mit dem Mischungsweg l beruht letztlich auf der Lokalitätshypothese, daß nämlich die turbulente Schubspannung bestimmt wird durch den lokalen Verlauf der mittleren Geschwindigkeitsverteilung $u(y)$, d. h. durch[5] du/dy. Gegen diese Annahme der lokalen Bedingtheit sind mehrfach Bedenken, insbes. in der angelsächsischen

[1] *W. Szablewski*, Ing.-Arch. 22 (1954) S. 268, zitiert als Arbeit I; Ing.-Arch. 23 (1955) S. 295, zitiert als Arbeit II.

[2] *J. Nikuradse*, Untersuchungen über die Strömung des Wassers in konvergenten und divergenten Kanälen, VDI-Forschungsheft 289 (1929).

[3] *L. Prandtl*, Z. angew. Math. Mech. 5 (1925) S. 137.

[4] *C. B. Millikan*, V. Intern. Kongr. f. Mechanik, Cambridge, Mass. 1938.

[5] Vgl. z. B. *W. Szablewski*, Ing.-Arch. 20 (1952) S. 67.

Literatur, erhoben worden. Was nun Phänomene der sog. freien Turbulenz (Düsenstrahlen und Nachlaufströmungen) mit ihren verhältnismäßig großen Mischungswegen betrifft, so ist dort allerdings, wie *L. Prandtl*[1] selbst bemerkte, die der lokalen Bedingtheit entsprechende differentielle Formulierung des turbulenten Austausches A, entspr. dem Ansatz $\tau = A\,\partial u/\partial y$, nicht als sachgemäß anzusehen; *Prandtl* hat dort konstanten Austausch über dem Querschnitt vorgeschlagen. Ähnlich könnten nach den Untersuchungen von *F. H. Clauser*[2] die Dinge hinsichtlich der äußeren Zone turbulenter Grenzschichten liegen. Für die wandnahe Zone turbulenter Grenzschichten jedoch ist die Hypothese der lokalen Bedingtheit der turbulenten Schubspannung und damit der *Prandtl*sche Ansatz (2) nach den bisherigen Ergebnissen als eine sachgemäße Grundlage anzusehen.

Eine andere prinzipielle Bemerkung betrifft die empirischen Koeffizienten der Wandgesetze [vgl. Abschn. 2, Gleichung (3)], die mit denen des log. Gesetzes identisch sind. Man findet häufig[3] die Ansicht vertreten, daß bei hydraulisch glatter Wand diese Koeffizienten $\varkappa$ und C bzw. $v_*\delta_0/\nu$ universelle Konstanten wären. Daß man in der Literatur schwankende numerische Angaben für diese Koeffizienten findet, braucht dem zunächst nicht zu widersprechen in Anbetracht dessen, daß Meßschwankungen nicht auszuschließen sind und daß die Auswertung für die Koeffizientenbestimmung keine eindeutige Prozedur ist. Es gibt jedoch zu bedenken, daß es auch Werte gibt, die ganz aus dem Rahmen der üblichen Werte fallen; z. B. ergab die Auswertung[4] der *Nikuradse*schen[5] Messung der Strömung des Wassers in konvergenten Kanälen, die als besonders störungsfrei anzusehen ist, die Werte $\varkappa = 0{,}6$; $C = 9{,}3$ bzw. $v_*\delta_0/\nu = 9{,}5$. Wir glauben daher, daß $\varkappa$ und C bzw. $v_*\delta_0/\nu$ eher als Modellkonstanten anzusehen sind, die von der Intensität der Freistromturbulenz abhängig sind. Diesbezügliche systematische Untersuchungen fehlen allerdings bisher. Handelt es sich um Strömungen an rauhen Wänden, so ist des weiteren die starke Abhängigkeit des Koeffizienten C bzw. $v_*\delta_0/\nu$ von der Wandrauhigkeit zu beachten[6].

Zum Vergleich mit der Theorie (Abschn. 3) haben wir die Messungen von *A. Fage*[7] und *V. A. Sandborn* and *R. J. Slogar*[8] herangezogen. Unter der Voraussetzung, daß diese Messungen einwandfrei sind, sind wir dabei so vorgegangen, daß wir unter Benutzung der experimentellen τ_0-Werte durch Anpassen der theoretischen an die experimentellen Geschwindigkeitsverteilungen die Koeffizienten $\varkappa$ und C bzw. $v_*\delta_0/\nu$ für das jeweilige Modell bestimmten. Diese erwiesen sich im Rahmen kleiner unregelmäßiger Schwankungen für das jeweilige Modell als Konstanten. Mit diesen Konstanten ergibt sich dann gute Übereinstimmung der Theorie mit dem Experiment sowohl hinsichtlich der Geschwindigkeitsverteilungen als auch hinsichtlich der Wandschubspannungen τ_0.

In Abschn. 4 haben wir schließlich die bekannte Messung von *G. B. Schubauer* and *P. S. Klebanoff*[9] herangezogen. Die in diesem Report angegebenen Werte der Wandschubspannung τ_0 sind umstritten[10]. Für hydraulisch glatte Wand erscheinen sie als zu groß; es bleibt noch die Alternative, daß die Wand eine gewisse Rauhigkeit aufwies. Die vom Standpunkt der im vorliegenden Bericht gegebenen Theorie aus lösbar erscheinende Aufgabe, diese Frage zu entscheiden, erwies sich in der praktischen Durchführung infolge der Empfindlichkeit der Rechnung und im Zusammenhang mit der Streuung der Messung als schwierig. Das erhaltene Resultat, daß die im Report angegebenen τ_0-Werte zu groß sind, ist als nur bedingt richtig anzusehen.

2. Die Wandgesetze. Das in Arbeit I abgeleitete Wandgesetz für turbulente Grenzschichten mit Druckanstieg lautet

$$u = \frac{v_*}{\varkappa}\left[2\left(\sqrt{1+\frac{dp/dx}{\tau_0}\,y}-1\right)+\ln\frac{4}{F}\frac{\sqrt{\ }-1}{\sqrt{\ }+1}\right]+\frac{v_*}{\varkappa}\left(-1+\ln 4\varkappa+\varkappa\frac{v_*\,\delta_0}{\nu}\right) \tag{3}$$

mit der Schubspannungsgeschwindigkeit $v_* = \sqrt{\tau_0/\varrho}$ und dem Formparameter

$$F = \frac{\nu}{v_*}\frac{dp/dx}{\varrho v_*^2}\,;$$

---

[1] *L. Prandtl*, Z. angew. Math. Mech. 22 (1942) S. 241.
[2] *F. H. Clauser*, Advances in Appl. Mech. IV (1956) S. 1.
[3] Vgl. z. B. *D. A. Spence*, J. Aeron. Sci. 23 (1956) S. 3. Spence gibt an $\varkappa = 0{,}4$ und $C = 5{,}5$ bzw. $v_*\,\delta_0/\nu = 6{,}8$.
[4] *W. Szablewski*, Ing.-Arch. 20 (1952) S. 37.
[5] *J. Nikuradse*, a. a. O.
[6] Vgl. *J. Rotta*, Ing.-Arch. 18 (1950) S. 277.
[7] *A. Fage*, R. & M. 1852 (1938).
[8] *V. A. Sandborn* and *R. J. Slogar*, NACA TN 3264 (1955).
[9] *G. B. Schubauer* and *P. S. Klebanoff*, NACA Rep. 1030 (1951).
[10] Vgl. z. B. *J. Rotta*, Mitt. aus dem Max-Planck-Inst. f. Strömungsforschung Nr. 8 (1953).

δ_0 ist ein Maß für die Dicke der laminaren Unterschicht (ϱ Dichte, μ Zähigkeit, $\nu = \mu/\varrho$ kinematische Zähigkeit).

In dimensionsloser Form können wir auch schreiben

$$\frac{u}{v_*} = \frac{2}{\varkappa}\left(\sqrt{1 + F\frac{v_* y}{\nu}} - 1\right) + \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{4}{F}\frac{\sqrt{\ } - 1}{\sqrt{\ } + 1} + \frac{1}{\varkappa}\left(-1 + \ln 4\varkappa + \varkappa\frac{v_* \delta_0}{\nu}\right). \tag{4}$$

Für $F \to 0$ ergibt sich aus (4) wieder das log. Gesetz

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{\varkappa}\ln\frac{v_* y}{\nu} + \frac{1}{\varkappa}\left(-1 + \ln 4\varkappa + \varkappa\frac{v_* \delta_0}{\nu}\right). \tag{5}$$

Das Gesetz (3) wurde aus (1) unter Zugrundelegung der *Prandtl*schen Formel (2) abgeleitet, wobei in Modifikation des üblichen Ansatzes der Existenz der laminaren Unterschicht durch den Ansatz $l = \varkappa(y - \delta_0)$ Rechnung getragen wurde[1]. Man erhält dann für das log. Gesetz die in (5) angegebene Form mit einer analysierten Fassung der Integrationskonstanten

$$C = \frac{1}{\varkappa}\left(-1 + \ln 4\varkappa + \varkappa\frac{v_* \delta_0}{\nu}\right). \tag{6}$$

Doch ist es für die vorliegende Untersuchung belanglos, ob man C oder $v_* \delta_0/\nu$ als empirischen Koeffizienten betrachtet.

Gesetz (3) wurde unter der Voraussetzung abgeleitet, daß in der Strömung eine Schicht mit log. Gesetz zumindest noch rudimentär vorhanden ist. In Ablösungsnähe (Ablösung $v_* = 0$) ist das angegebene Gesetz (4), wie in Arbeit II dargelegt wurde, im wesentlichen durch Einführung der Schubspannungsgeschwindigkeit

$$V_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\varrho} + \frac{1}{\varrho}\frac{dp}{dx}\delta_0}$$

und demgemäß Einführung der Reynoldsschen Zahl $V_* \delta_0/\nu$ der laminaren Unterschicht zu modifizieren. Wir gehen hier nicht weiter darauf ein, wie wir überhaupt das Verhalten turbulenter Grenzschichten in Ablösungsnähe ein anderes Mal untersuchen wollen.

3. Vergleich mit Messungen[2]. a) A. Fage, Profile and skin-friction aerofoil drags, R. & M. 1852 (1938). Für die Anwendung der Formel (3) benötigen wir außer τ_0 noch den Druckgradienten dp/dx, den wir durch graphisches Differenzieren der experimentellen p-Verteilung erhielten (Abb. 1).

Indem wir von der Vorstellung (vgl. Abschnitt 1) ausgehen, daß die empirischen Koeffizienten $\varkappa$ und $v_* \delta_0/\nu$ (bzw. C nach Formel (6)) keine — aus anderen Messungen bekannten — universellen Konstanten, sondern Modellkonstanten darstellen, haben wir zunächst diese Koeffizienten bestimmt. Das geschieht hier zweckmäßigerweise so, daß die experimentellen Geschwindigkeitsverteilungen u bzw. $\varphi = u/u_1$ (u_1 Geschwindigkeit der Potentialströmung) über der Koordinate

$$\xi = 2\left(\sqrt{1 + \frac{dp/dx}{\tau_0}y} - 1\right) + \ln\frac{\sqrt{\ } - 1}{\sqrt{\ } + 1} \tag{7}$$

aufgetragen werden, wobei wir τ_0 der Messung entnehmen; denn über ξ aufgetragen erscheint unsere Funktion (3) als Gerade! Man hat dann nur eine Gerade durch die wandnahen Meßpunkte zu legen (vgl. Abb. 4), wobei allerdings die sehr wandnahen Punkte der laminaren Unterschicht oder der Übergangsschicht, die als solche leicht erkennbar sind, auszuschließen sind. Aus den Koeffizienten der Geraden lassen sich dann nach (3) $\varkappa$ und $v_* \delta_0/\nu$ ermitteln. Auf diese Weise erhielten wir für die einzelnen Schnitte der Messung $Re = 1{,}665 \cdot 10$ von *A. Fage*

$\frac{x}{C}$	$\varkappa$	$\frac{v_* \delta_0}{\nu}$
0,403	0,45	6,48
0,504	0,46	6,72
0,605	0,49	6,72
0,706	0,50	6,18
0,807	0,47	7,12
0,950	0,51	7,02

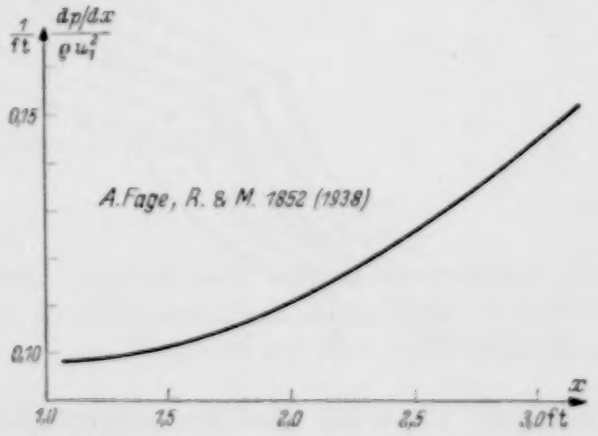


Abb. 1.

[1] *W. Szablewski*, Z. angew. Math. Mech. 31 (1951) S. 131; ferner *J. Rotta*, a. a. O., S. 3.

[2] Rechnungen und Zeichnungen der Ziff. 3 und 4 hat mein Mitarbeiter, Herr *Herbert Moch*, durchgeführt.

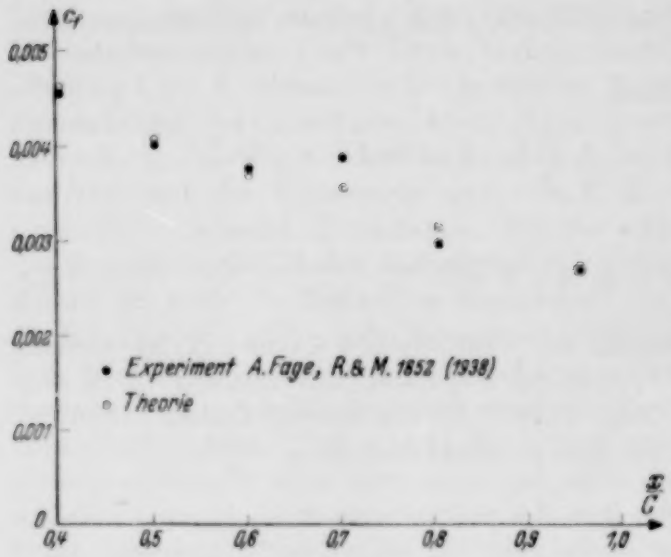


Abb. 2.

also eine Reihe von Werten mit echter Schwankung um die Mittelwerte

$$\varkappa = 0{,}48 \qquad \frac{v_* \, \delta_0}{\nu} = 6{,}71 \qquad \text{(bzw. } C = 5{,}99\text{)}.$$

Wir haben damit gleichzeitig den Nachweis erbracht, daß die Koeffizienten $\varkappa$, $v_* \, \delta_0/\nu$ (bzw. C) Konstanten des betrachteten Modells sind. (Die obigen Schwankungen dürften im wesentlichen dadurch bedingt sein, daß die geschilderte Ermittlung der Koeffizienten keine eindeutige Prozedur ist).

Nachdem einmal die beiden empirischen Koeffizienten des Modells ermittelt worden sind, ergibt sich gute Übereinstimmung der Theorie mit dem Experiment sowohl hinsichtlich der Geschwindigkeitsverteilungen als auch hinsichtlich der Wandschubspannungen τ_0.

Die Ermittlung der Wandschubspannungen τ_0 aus den experimentellen Geschwindigkeitsverteilungen erfolgt dann in einfacher und sicherer Weise durch Anpassen der theoretischen Ver-

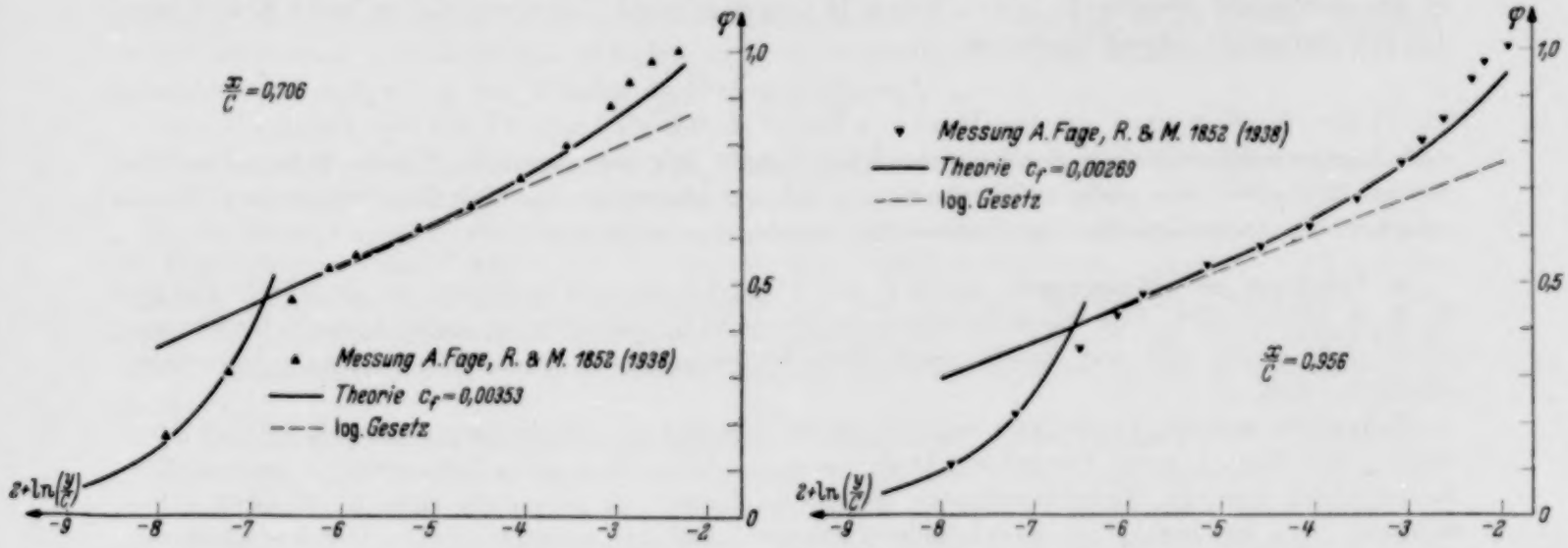


Abb. 3.

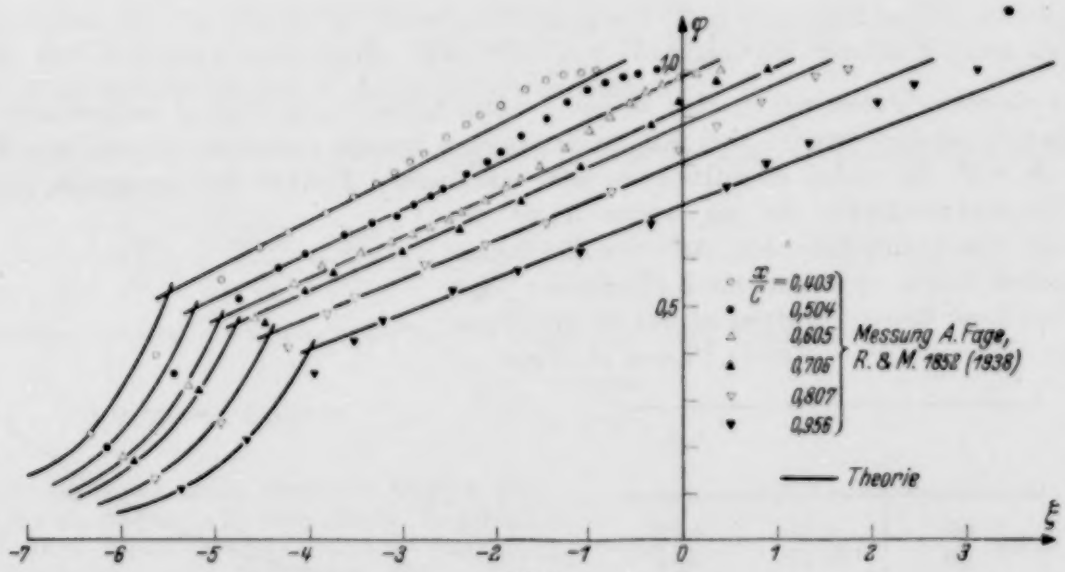


Abb. 4.

teilungen (3) an die über $\ln y$ aufgetragenen experimentellen Verteilungen (vgl. Abb. 3). Die so theoretisch ermittelten Werte τ_0 stehen in guter Übereinstimmung mit den experimentellen Werten; vgl. Abb. 2, wo wir $c_f = \tau_0 / \left(\frac{\varrho}{2}\right) u_1^2$ aufgetragen haben.

Zu bemerken ist noch, daß es demnach bei bekannter statischer Druckverteilung prinzipiell möglich ist, im Druckanstiegbereich aus der experimentellen Geschwindigkeitsverteilung die Wandschubspannungen τ_0 mittels Formel (3) zu gewinnen, sofern einmal die Modellkonstanten $\varkappa$, $v_* \delta_0/\nu$ (bzw. C) bekannt sind. Die Ermittlung derselben erfolgt in einem praktisch vorliegenden Fall am besten wohl an Hand von im Druckabfallbereich durchgeführten Messungen (einschließlich τ_0) mittels des log. Gesetzes (5).

Inwiefern nun das Wandgesetz (3) bzw. (4) die experimentellen Geschwindigkeitsverteilungen in einer wandnahen vollturbulenten Zone der Grenzschicht beschreiben, zeigen die Abb. 3 und 4. Dabei wurde in die Formeln mit den theoretischen τ_0-Werten eingegangen.

b) V. A. Sandborn and R. J. Slogar, Study of the momentum distribution of turbulent boundary layer in adverse pressure gradients, NACA TN 3264 (1955). Der Vergleich von Theorie und Experiment erfolgt nach dem in a) geschilderten Vorgang. Abb. 5 zeigt die durch numerische Differentiation erhaltene Verteilung des äußeren Druckgradienten.

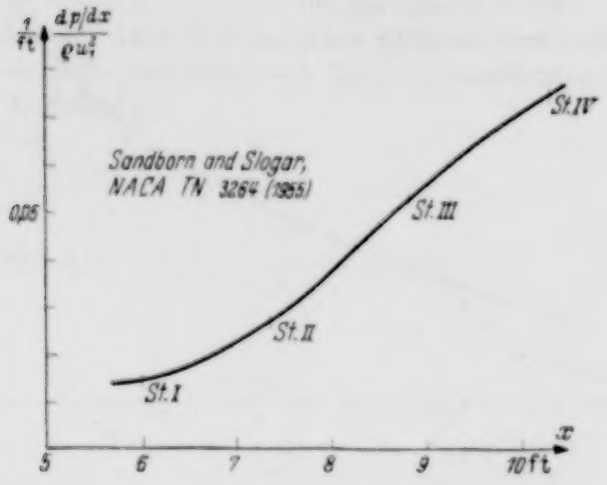


Abb. 5.

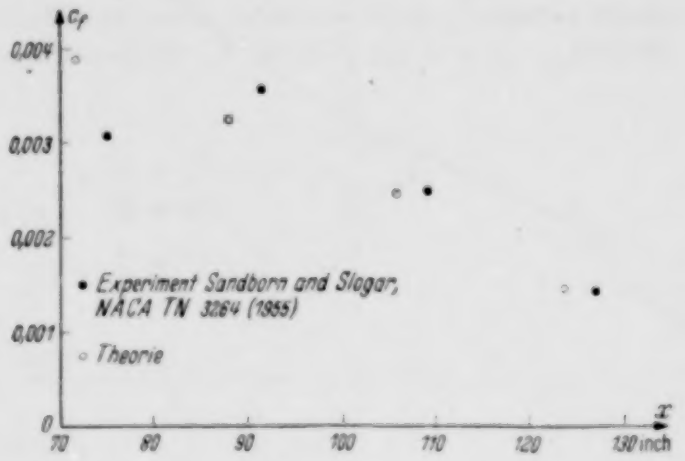


Abb. 6.

Aus den über der Variablen ξ (Formel (7)) unter Benutzung der experimentellen τ_0-Werte[1] aufgetragenen experimentellen Geschwindigkeitsverteilungen ergaben sich als Koeffizienten der durch die wandnahen Punkte gelegten Geraden für die Meßschnitte (vgl. Abb. 8)

	$\varkappa$	$\frac{v_* \delta_0}{\nu}$
I	0,36	5,16
II	0,41	5,25
III	0,44	5,22
IV	0,43	4,22

mit den Mittelwerten

$$\varkappa = 0{,}41 \quad \text{und} \quad \frac{v_* \delta_0}{\nu} = 5{,}0 \ \text{(bzw. } C = 3{,}77)$$

als Modellkonstanten.

Nachdem einmal die Modellkonstanten bekannt sind, ergeben sich mittels Durchlegen der theoretischen Verteilungen (3) durch die experimentellen Verteilungen (vgl. Abb. 7) die in Abb. 6 dargestellten theoretischen Werte der Wandschubspannung c_f im Vergleich mit den experimentellen.

Den Vergleich der Geschwindigkeitsverteilungen zeigen Abb. 7 und 8, wobei wieder in die Formeln mit den theoretischen Werten τ_0 eingegangen wurde.

---

[1] Entnommen der im TN angegebenen Meßkurve.

Anmerkung: Man kann dem Wandgesetz (3) auch die universelle Formulierung

$$\left.\begin{aligned} \frac{u}{v_*} &= \frac{1}{\varkappa}\xi^* + \frac{1}{\varkappa}\left(-1 + \ln 4\varkappa + \varkappa\frac{v_*\,\delta_0}{\nu}\right) \\ \xi^* &= 2\left(\sqrt{1 + \frac{dp/dx}{\tau_0}y} - 1\right) + \ln\frac{4}{F}\frac{\sqrt{}-1}{\sqrt{}+1} \\ \left|\xi^* = \xi + \ln\frac{4}{F}\right.&\text{ nach Formel (7)}\left.\right| \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

mit

geben.

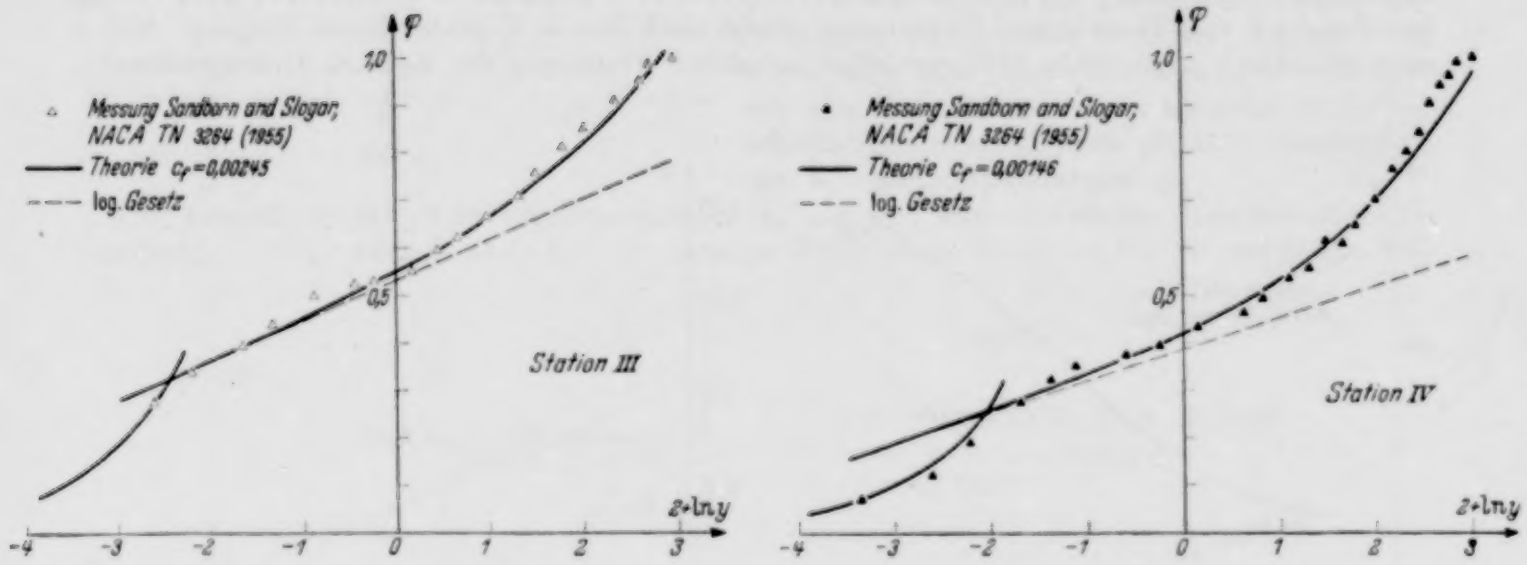


Abb. 7.

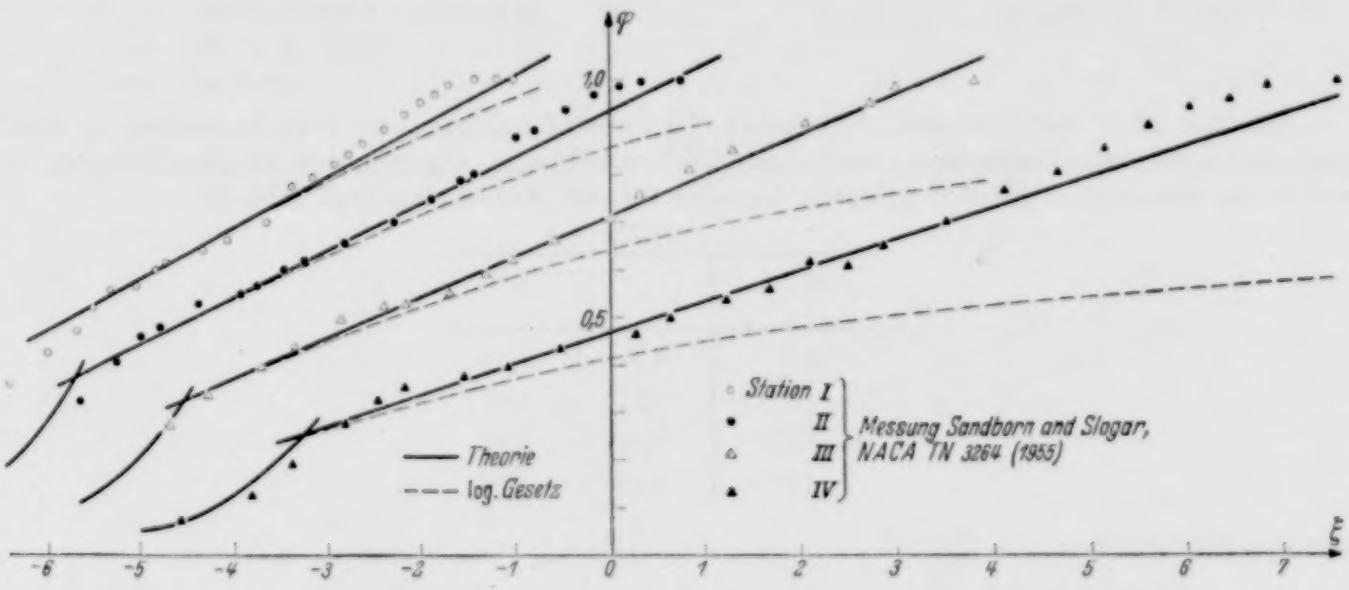


Abb. 8.

In der demgemäßen Auftragung fallen dann die Geraden der Abb. 4 und 8 in jeweilig eine Gerade zusammen und entsprechend werden die Meßpunkte gesammelt. Inwieweit das Wandgesetz für den einzelnen Schnitt erfüllt ist, ersieht man jedoch besser aus den Auftragungen der Abb. 4 und 8. Wir haben deshalb auf die Darstellung der universellen Formel hier verzichtet.

4. Analyse der Messung von G. B. Schubauer and P. S. Klebanoff „Investigation of separation of the turbulent boundary layer". NACA Rep. 1030 (1951). Wir stellten uns (vgl. Abschnitt 1) die Aufgabe, die Alternative zu entscheiden, ob die im Report angegebenen Werte der Wandschubspannung τ_0 als zu groß oder als durch Wandrauhigkeit bedingt anzusehen seien.

Es galt hier also, aus den wandnahen experimentellen Geschwindigkeitsverteilungen allein (ohne Zuhilfenahme wenigstens einiger gemessener τ_0-Werte zum Zwecke der Bestimmung der Modellkonstanten, vgl. Abschn. 3) die Wandschubspannungen zu ermitteln.

Vom theoretischen Standpunkt aus erscheint die Aufgabe als sehr einfach: Bildet man im Gültigkeitsbereich des wandnahen Gesetzes (3) für drei Punkte I, II, III eines Schnittes mit den Koordinaten y_I, y_{II}, y_{III} z. B. das Verhältnis

$$\left(\frac{\varphi_{II}-\varphi_{III}}{\varphi_I-\varphi_{III}}\right)_{theor.}=\frac{\xi_{II}-\xi_{III}}{\xi_I-\xi_{III}} \qquad (\xi \text{ nach Formel (7)}),$$

so sind damit formelmäßig die empirischen Koeffizienten $\varkappa$, $v_* \delta_0/\nu$ (bzw. C) eliminiert und das Verhältnis enthält (bei bekanntem Druckgradienten dp/dx) nur die Unbekannte τ_0.

Man hätte dann nur noch aus der experimentellen Geschwindigkeitsverteilung des Schnittes die Werte φ_I, φ_{II}, φ_{III} für die drei Koordinaten y_I, y_{II}, y_{III} abzulesen; und aus der Gleichung

$$\left(\frac{\varphi_{II}-\varphi_{III}}{\varphi_I-\varphi_{III}}\right)_{exp.}=\frac{\xi_{II}-\xi_{III}}{\xi_I-\xi_{III}} \qquad (9)$$

könnte dann das gesuchte τ_0 berechnet werden. Dabei würde im weiteren Verlauf der Rechnung, siehe Formel (12), sich Wandrauhigkeit an kleinen numerischen Werten $v_* \delta_0/\nu$ bzw. C zeigen (vgl. *J. Rotta*[1].).

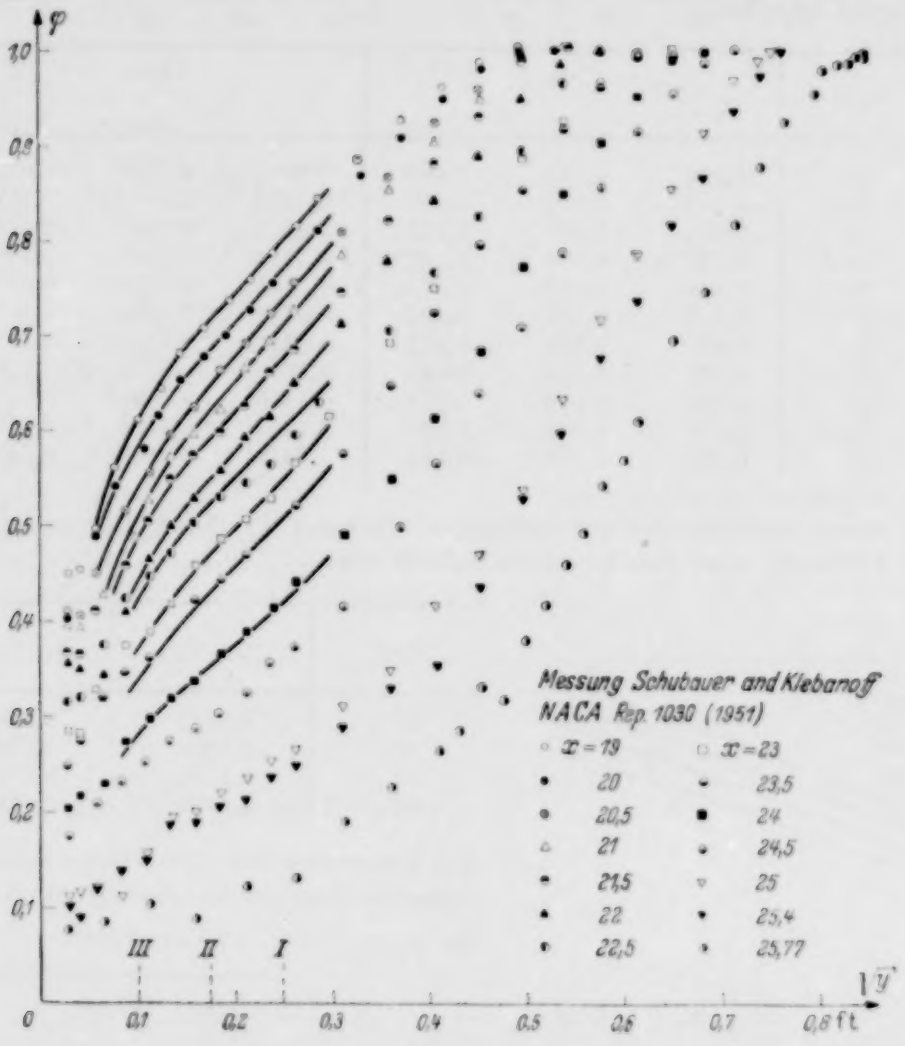


Abb. 9.

In der praktischen Durchführung ist das leider nicht so einfach. Es zeigt sich nämlich, daß eine sichere Bestimmung der τ_0-Werte aus (9) eigentlich „mathematisch genaue" experimentelle Werte φ_I, φ_{II}, φ_{III} erfordern würde; denn kleine Änderungen der φ-Werte bedingen bereits große Änderungen der τ_0-Werte. Es stellte sich schließlich nur folgender Weg als gangbar heraus: Zunächst einmal galt es, durch die mit den normalen Schwankungen behafteten Meßpunkte eine „mittlere"

[1] *J. Rotta*, a. a. O., S. 3.

Meßkurve zu legen. Zu dem Zweck erwies es sich als vorteilhaft, die Meßpunkte über der Koordinate $\sqrt{y}$ aufzutragen. Diese Auftragung wird nahegelegt, wenn man beachtet, daß nach Formel (3) sich ergibt

$$\varphi \approx \frac{2}{\varkappa}\left[\sqrt{\left(\frac{dp/dx}{\varrho\, u_1^2}\right)}\sqrt{y} - \frac{1}{2}\left(\frac{v_*}{u_1}\right)^2 \frac{1}{\sqrt{()}}\,\frac{1}{\sqrt{y}}\right] + \\ + \frac{1}{\varkappa}\frac{v_*}{u_1}\left[-3 + \ln 4\varkappa + \ln\frac{4}{F} + \varkappa\frac{v_*\,\delta_0}{\nu}\right] \quad \text{für} \quad \frac{dp/dx}{\tau_0}\,y \gg 1\,; \qquad (10)^1$$

der Einfluß der Reibung beginnt bei der Auftragung über $\sqrt{y}$, wie hier noch angemerkt werden soll, dort, wo die Meßkurve anfängt, sich von der Geraden abzukrümmen.

Aus dieser, den wandnahen Bereich auseinanderziehenden, Auftragung (Abb. 9) ließen sich nun die aus dem Trend der Messung fallenden Punkte in Wandnähe besonders gut erkennen und eine mittlere Meßkurve ermitteln. (Bei der Auftragung über $\ln y$ sind die herausfallenden Punkte nicht so gut erkennbar).

Die weitere Untersuchung erstreckte sich dann auf die vier Schnitte $x = 19, 20, 21, 22$ ft. Als Punkte I, II, III wurden für diese Schnitte die Punkte mit den Abszissen $\sqrt{y_{\mathrm{I}}} = 0{,}25$, $\sqrt{y_{\mathrm{II}}} = 0{,}175$, $\sqrt{y_{\mathrm{III}}} = 0{,}1$ ft festgelegt, die als innerhalb des Geltungsbereiches des Wandgesetzes (3) gelegen anzusehen sind; vgl. Abb. 13. Bei diesen Abszissen wurden auf den jeweiligen Meßkurven der Abb. 9 die Ordinaten $\varphi_{\mathrm{I}}, \varphi_{\mathrm{II}}, \varphi_{\mathrm{III}}$ abgelesen und unter Mittelung die Kurven $\varphi_{\mathrm{I}}, \varphi_{\mathrm{II}}, \varphi_{\mathrm{III}}$ über x aufgetragen; Zahlenwerte gibt die Tabelle.

x[ft]	$\varphi_{exp.}$			φ_{mittel}		
	φ_I	φ_{II}	φ_{III}	φ_I	φ_{II}	φ_{III}
19	0,800	0,715	0,609	0,8068	0,7180	0,6100
19,5	0,788	0,699	0,596	0,7884	0,6982	0,5916
20	0,771	0,685	0,582	0,7672	0,6762	0,5708
20,5	0,735	0,648	0,542	0,7414	0,6500	0,5460
21	0,710	0,620	0,510	0,7108	0,6208	0,5176
21,5	0,677	0,592	0,487	0,6766	0,5880	0,4874
22	0,638	0,548	0,442	0,6388	0,5514	0,4536
22,5	0,602	0,523	0,422	0,5974	0,5116	0,4166
23	0,550	0,470	0,373	0,5500	0,4686	0,3754
23,5	0,509	0,430	0,340	0,4954	0,4186	0,3296
24	0,421	0,354	0,283	0,4316	0,3600	0,2800

Es wurden dann unter nochmaliger geringfügiger Glättung die Kurven $\varphi_{\mathrm{II}} - \varphi_{\mathrm{III}}$ sowie $\varphi_{\mathrm{I}} - \varphi_{\mathrm{III}}$ aufgetragen; bei Ablesung von den letzteren erhielt man

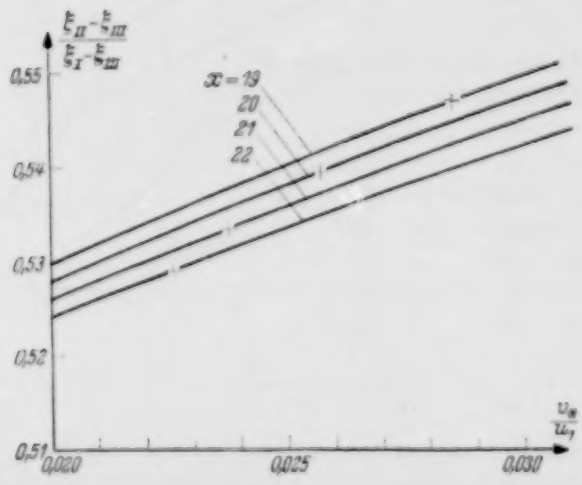


Abb. 10.

x[ft]	$\varphi_{II}-\varphi_{III}$	$\varphi_I-\varphi_{III}$	$\frac{\varphi_{II}-\varphi_{III}}{\varphi_I-\varphi_{III}}$
19	0,1077	0,1969	0,5470
20	0,1058	0,1962	0,5395
21	0,1027	0,1926	0,5335
22	0,0982	0,1856	0,5291

Bei Einsetzen des ermittelten dp/dx (Abb. 11) ergab dann die graphische Lösung der Gl. (9) gemäß Abb. 10 für $v_*/u_1 = \sqrt{\tau_0/\varrho\, u_1^2}$ die Werte

x[ft]	$\frac{v_*}{u_1}$
19	0,02850
20	0,02570
21	0,02377
22	0,02256

Aus der letzteren Abbildung ist die Empfindlichkeit der Rechnung in bezug auf kleine Änderungen der experimentellen φ-Werte schon ersichtlich. Sie wird besonders deutlich, wenn man unter

[1] Für die Ablösung würde aus (10) folgen: $\varphi = \frac{2}{\varkappa}\sqrt{()}\,\sqrt{y}$. Diese Formel hat jüngst *B. S. Stratford*, J. Fluid Mech. 5 (1959) S. 1, seiner Betrachtung der Ablösung turbulenter Grenzschichten zu Grunde gelegt.

Festhaltung unserer φ_{I}- und φ_{II}-Werte sich die φ_{III}-Werte berechnet, mit denen (9) die im Report angegebenen wesentlich größeren τ_0-Werte (vgl. Abb. 12) liefern würde. Es ergibt sich als „Alternativ-Differenz" im Mittel 0,008 in Richtung kleinerer φ_{III}-Werte. Wenn ein um diese kleine Differenz von $\approx 0{,}01$ niedriger gelegener Verlauf von φ_{III} auch nicht aus den Messungen ohne weiteres ablesbar erscheint, so ist sie andererseits doch — wie ein Blick auf Abb. 9 und die Tabellen zeigt — zu gering, um unser Resultat als sicher anzusehen. Es kann ihm daher nur ein bedingter Wert zugesprochen werden.

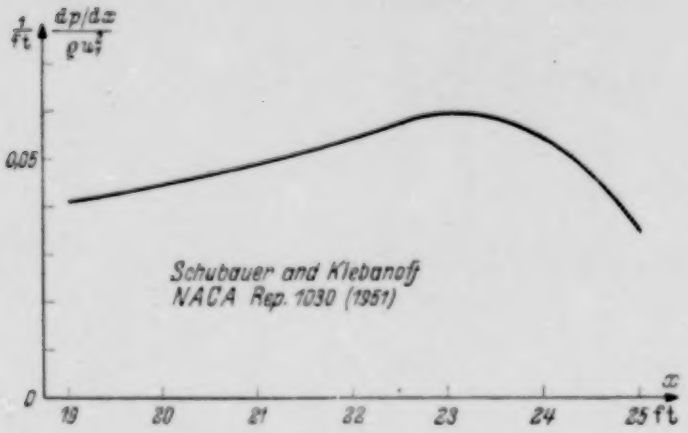


Abb. 11.

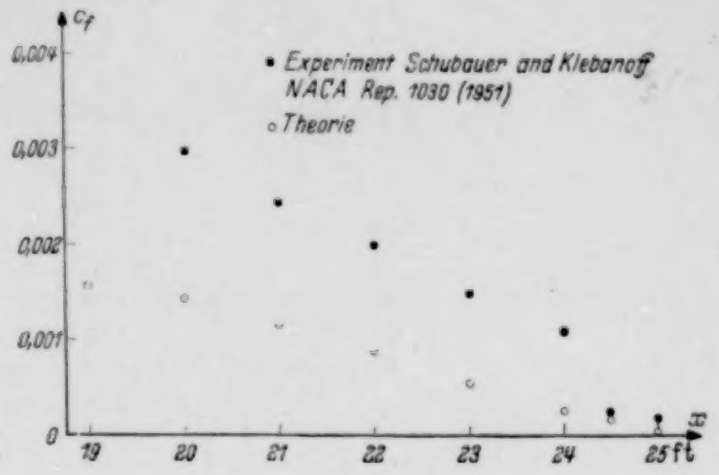


Abb. 12.

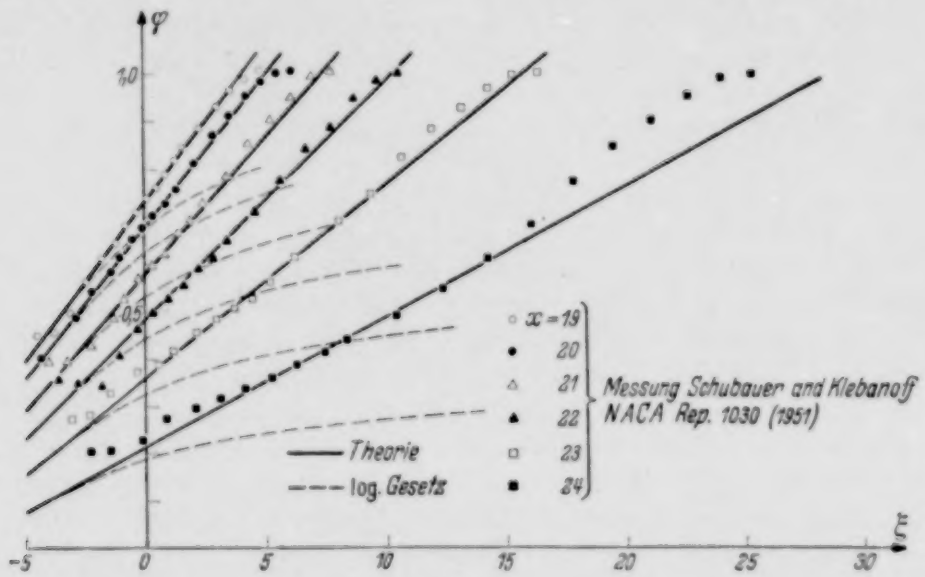


Abb. 13.

Gemäß den aus (3) und (7) folgenden Formeln

$$\varkappa = \frac{v_*}{u_1} \frac{\xi_{\mathrm{I}} - \xi_{\mathrm{III}}}{\varphi_{\mathrm{I}} - \varphi_{\mathrm{III}}} \tag{11}$$

und

$$\frac{v_* \delta_0}{\nu} = \frac{\varphi_{\mathrm{I}}}{v_*/u_1} - \frac{1}{\varkappa}\left[\xi_I + \left(-1 + \ln 4\varkappa + \ln \frac{4}{F}\right)\right], \tag{12}$$

wobei das einzusetzende dp/dx durch numerische Differentiation gewonnen wurde (Abb. 11), ergab sich dann

x[ft]	$\varkappa$	$\frac{v_* \delta_0}{\nu}$
19	0,4105	8,374
20	0,4055	9,230
21	0,4152	9,160
22	0,4408	8,102

mit den Mittelwerten

$$\varkappa = 0{,}42 \qquad \text{und} \qquad \frac{v_* \, \delta_0}{\nu} = 8{,}72 \ \text{(bzw. } C = 7{,}57\text{)}.$$

Unter Zugrundelegung dieser Werte für $\varkappa$, $v_* \, \delta_0/\nu$ als Modellkonstanten haben wir dann nach dem in Abschn. 3 dargelegten Verfahren den Vergleich von Theorie und Experiment auch für dieses Modell durchgeführt. Abb. 12 zeigt die theoretischen und die im Report angegebenen Wandschubspannungen. Abb. 13 und Abb. 14 enthalten die Geschwindigkeitsverteilungen.

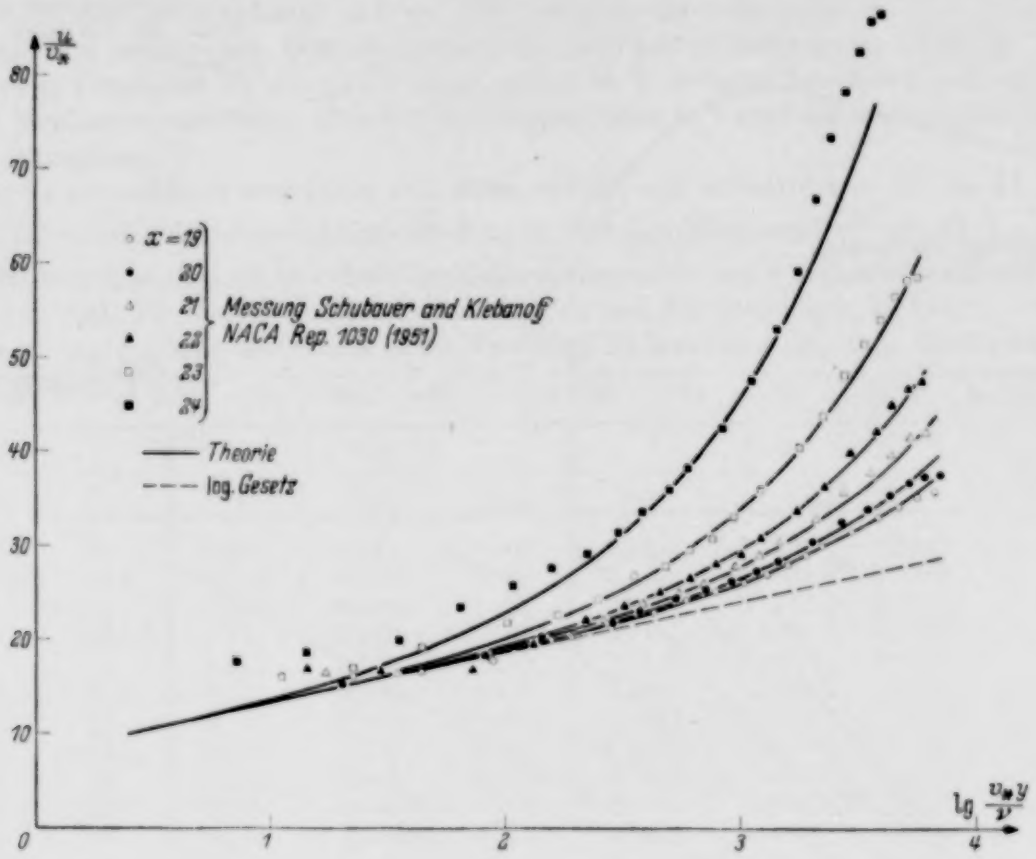


Abb. 14.

Das Herausfallen der sehr wandnahen Punkte in den letzteren Abb. dürfte dabei wohl, wie man aus Abb. 9 ersehen kann, zu Lasten des Experiments gehen.

5. Zusammenfassung. Es werden für turbulente Grenzschichten mit Druckanstieg experimentelle Geschwindigkeitsverteilungen in Wandnähe verglichen mit dem Wandgesetz dieser Verteilungen. Es ergibt sich gute Übereinstimmung.

(Eingegangen am 5. Dezember 1959)

Anschrift des Verfassers: Dr. *W. Szablewski*, Berlin W 8, Mohrenstr. 39.

Soeben erschien:

Der durchlaufende Bogenträger auf elastischen Stützen mit und ohne Versteifungsträger

Von Dipl.-Ing. ETH WALTER STAMPF, Stockholm

Mit 206 Abbildungen und 2 Tafeln im Text. VIII, 196 Seiten Gr.-8°. 1960. Ganzleinen DM 37,50

INHALTSÜBERSICHT

Einleitung · Der durchlaufende Bogenträger auf elastischen Säulen: Grundlagen und Vorzeichenregeln. Die Festwerte der Bogen und Stützen. Einspannungsmomente M_1 und M_2, sowie Horizontalschub H des Bogens. Momente und Querkraft der Säule. Belastungsglieder der Grundsysteme. Die Knotenpunktsgleichungen. Elastisch eingespannte Endfelder und Stützenfüße. Allgemeines Auflösungsverfahren der Knotenpunktsgleichungen für viele Öffnungen. Spezialfälle: Knotenpunktsgleichungen und Unbekannte. Innere Schnittkräfte in einer beliebigen Sektion F. Eigengewicht der Konstruktion. Die Einflußlinien · Der durchlaufende Bogenträger auf elastischen Stützen, mit obenliegendem Versteifungsträger: Grundlagen und Voraussetzungen. Grundsysteme der Bogen. Die Festwerte der Bogen. Kämpfermomente M_A und M_B, Horizontalschub H_{A-B} des elastisch eingespannten Bogens. Die Knotenpunktsgleichungen. Die Einflußlinien. Temperaturänderungen und Schwinden des Betons. Bremskräfte in der Brückenlängsrichtung. Windkräfte quer zur Brücke · Verwandte Systeme und näherungsweise Berechnung: Verwandte Systeme. Näherungsweise Berechnung · Anhang: Ein Auflösungsverfahren der Knotenpunktsgleichungen mit Hilfe der Festhaltemomente: Übersicht. Auflösung der „Dreiverschiebungsgleichungen" mit Hilfe der Übergangszahlen. Festhaltemomente der äußeren Belastung. Festhaltemomente für den Drehwinkel $\alpha_m = +1$. Bestimmungsgleichungen der Drehwinkel der Knotenpunkte und Berechnung der Horizontalverschiebungen · Tafel I und II · Schrifttumverzeichnis · Sachverzeichnis.

ZUR INFORMATION

Für die hier behandelten Tragsysteme wird versucht, den bestehenden Kräftemethoden (E. MÖRSCH, E. MELAN) eine neue, reine Deformationsmethode gegenüberzustellen. Wir erhalten die sogenannten „Knotenpunktsgleichungen", die den Träger charakterisieren. Mit diesen können sämtliche Belastungszustände, Schwinden und Temperaturänderungen, sowie alle möglichen Verschiebungszustände, wie Zwangsverschiebungen, Stützensenkungen usw., erfaßt werden. Die Einflußlinien werden als Biegelinien dargestellt. Zweckmäßige neue Auflösungsmethoden der Knotenpunktsgleichungen werden an Hand von einigen Beispielen erprobt. Bei vielen Knotenpunkten dient ein Iterationsverfahren. Für einen symmetrischen Träger bis zu 8 verschiebbaren Knotenpunkten erweist sich die Methode der „Festhaltemomente", kombiniert mit einer Lastumordnung als sehr vorteilhaft. Spezielle Stützenkonstruktionen werden untersucht, sowie das Anwendungsgebiet auf den Hochbau mit dessen besonderen verwandten Konstruktionen ausgedehnt. Die Arbeit ist sowohl für den Studierenden, wie für den Ingenieur der Konstruktionspraxis vorgesehen, indem die Theorie sehr leicht verständlich und übersichtlich gehalten ist und stets durch numerische Beispiele und Anwendungen unterstützt wird. Eine angenäherte Berechnung mit praktischen Tabellen gibt auch die Möglichkeit, in sehr kurzer Zeit eine Vorausbestimmung der Abmessungen des Tragwerkes vorzunehmen.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Vor kurzem erschien:

Repertorium und Übungsbuch der Technischen Mechanik

Von Dr.-Ing. ISTVÁN SZABÓ,

o. Professor der Mechanik an der Technischen Universität Berlin

Mit 254 Abbildungen. VIII, 273 Seiten Gr.-8°. 1960. Ganzleinen DM 24,—

INHALTSVERZEICHNIS

Allgemeine Bemerkungen. Zur Mechanik. Zur Vektoralgebra.

Statik starrer Körper. Kräfte, Spannungen und Gleichgewichtsbedingungen: Kraft und Spannung. Linienflüchtigkeit der Kraft und Gleichwertigkeit zweier Kraftsysteme am starren Körper. Die Kräftereduktion. Gleichgewicht der Kräfte. Kräftezerlegung. Der Schwerpunkt. Das Gleichgewicht an einem aus starren Körpern zusammengesetzten System. Ebene Fachwerke. Statik der Seile (Ketten) in der Ebene. Das Prinzip der virtuellen Arbeiten.

Festigkeitslehre und Deformationstheorie elastischer Tragwerke. Elementare Spannungs- und Deformationstheorie des Balkens: Die Schnittlasten des Balkens. Die HOOKEschen Gesetze. Deformation und Beanspruchung des Balkens. Flächenmomente zweiten Grades. Näherungsweise Bestimmung der Schubspannungen. Der Balken auf nachgiebiger Unterlage. Torsion eines kreiszylindrischen Stabes. Torsion dünnwandiger Hohlquerschnitte. Die BREDTschen Formeln. Die Torsion schmaler Rechteckquerschnitte. Formänderungsarbeit des Balkens. Die Sätze von CASTIGLIANO. Die Knickung eines Balkens · Ausgewählte Probleme der höheren Elastizitätstheorie: Allgemeine Spannungs- und Deformationsgleichungen. Der ebene Spannungszustand. Die Theorie der dünnen Platten. Der achsensymmetrische Spannungszustand. Biegung und Knickung kreisförmiger Ringe und Rohre. Allgemeine Torsionstheorie des Balkens.

Kinematik und Kinetik. Kinematik: Bahn, Geschwindigkeit und Beschleunigung eines bewegten Punktes. Bewegung eines starren Körpers. Relativbewegung · Kinetik der starren und deformierbaren Systeme: Das NEWTONsche Grundgesetz und seine Folgerungen. Schwerpunkt- und Momentensatz. Folgerungen aus dem Momentensatz. EULERsche (Kreisel-) Gleichungen. Die Prinzipien von D'ALEMBERT und HAMILTON. LAGRANGEsche Bewegungsgleichungen. Schwingungen mit endlich vielen Freiheitsgraden. Schwingungen des Kontinuums (Saiten, Membranen, Stäbe und Platten). Der Stoß.

Dynamik der Flüssigkeiten und Gase. Ideale und zähe Flüssigkeiten: Die Grundgleichungen idealer Flüssigkeiten (und reibungsfreier Gase). Theorie von DANIEL BERNOULLI für den Stromfaden. Potentialströmung idealer Flüssigkeiten, Zähe Flüssigkeiten · Dynamik idealer Gase: Grundgleichungen. Stationäre Stromfadentheorie · Grundgesetze der Ähnlichkeitsmechanik: Allgemeine Bemerkungen. Mechanische Ähnlichkeit. Das NEWTONsche Ähnlichkeitsgesetz. Übertragungsgesetze für spezielle Kräfteklassen. Gleichzeitige Wirkung von Kräften verschiedener Natur · Literaturverzeichnis · Namen- und Sachverzeichnis.

SPRINGER-VERLAG · BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

Springer-Verlag · Berlin/Göttingen/Heidelberg. Printed in Germany. V/12/6